



LÓGICA Y PARADOJAS: UN ESTUDIO FILOSÓFICO

PARADOJAS COMO DESAFÍOS MENTALES Y MORALES
VOLUMEN I

RAFAEL FÉLIX MORA RAMÍREZ

LÓGICA Y PARADOJAS: UN ESTUDIO FILOSÓFICO

Rafael Félix Mora Ramirez

Paradojas como Desafíos Mentales y Morales
Volumen I



EDITORIAL RED HOLOS XXI CA
Venezuela, 2025

FONDO EDITORIAL RED HOLOS XXI CA
Saber y ciencia para todos

J500907281

Versión digital

Depósito Legal LA2025000008

ISBN obra completa 978-980-8020-05-2

ISBN Volumen I 978-980-8020-06-9

ISBN: 978-980-8020-05-2



©Sello editorial: Red Holos XXI (978-980-8020)

Año 2025

CRÉDITOS

Edición General: Dra. Francis González

Gestión Editorial: Dra. Elba Ávila

Revisión, Estructura y Estilo: Dra. Isabel Suárez

Diagramación y portada: Equipo de diseño de la Red Holos XXI

El contenido del presente libro ha sido arbitrado por un comité científico nacional e internacional mediante el método doble ciego y apoyado en un riguroso instrumento de revisión formativa.
<https://redholosxxi.com/reglamento-del-fondo-editorial-holos-xxi/>

Autor:

© Rafael Félix Mora Ramirez

Para referenciamiento:

Mora Ramirez, R. (2025). *Lógica y Paradojas: Un Estudio Filosófico. Volumen 1: Paradojas como Desafíos Mentales y Morales*. Fondo Editorial Red Holos XXI.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Dedicatoria

A todas las mentes que, frente a los signos de nuestra fragilidad como humanidad, aún encuentran razones para resistir y esperanza para construir. Que estas señales no sean ignoradas, sino un llamado urgente a la reflexión y a la acción decidida. Que nunca falten voces auténticas que, desde la introspección y la empatía, iluminen caminos hacia un futuro donde la inteligencia, la solidaridad y el cuidado de nuestro mundo prevalezcan sobre las sombras que nos acechan.

A mi amada Carolina Ayala Palomino. Recuerda que, como dijo Benedetti: “Si hago cosas por ti, no es para que me quieras. Es para que sepas que te quiero”.

A mis colegas Armando Medina Ibañez, Teresa Loayza Lozano y a todos los de la UNFV, sobre todo de la plana de Filosofía.

A mi querido profesor Óscar García Zárate.

A mis amigos Cristian Morales Salhuana, David Sánchez Rosas y Carlos Llacchua Iparraguirre.

A los miembros del Instituto Peruano de Investigación de Lógica y Filosofía (IPILOF).

A los miembros del Grupo de Investigación Juan Bautista Ferro de la UNI.

La vida entera está llena de paradojas, es decir, de situaciones en las que la realidad se manifiesta como algo plenamente contradictorio y problemático. ¿Por qué el hecho de no tener propiedades también puede ser entendido como una especie de propiedad? ¿Cómo es posible comprender la definición de lo infinito y, a la vez, entender que, los puntos presentes entre el cero y el uno supera en cantidad a los infinitos números naturales? ¿Por qué pasan hambre los campesinos de los países pobres si ellos producen la comida? ¿Qué hacer frente a estas paradojas? Nuestra mente, nuestro lenguaje y nuestra ciencia deben tener alguna especie de estructura básica y fundamental que hace posible la formulación de estos desafíos mentales. ¿Cómo es esa estructura? ¿existe por sí misma? ¿tiene su propio orden? ¿depende de lo que quieran o deseen los seres humanos o no?

ÍNDICE

PRÓLOGO. El inicio de este viaje.....11

PRIMERA PARTE: Paradojas como desafíos mentales y morales18

CAPÍTULO

1

CONOCIENDO A LAS PARADOJAS

Resumen

1. Breve historia de la contradicción	19
2. Aporías y antinomias	20
3. Definición de paradoja	24
4. Clasificación de paradojas	25
5. El desafío de la paradoja del mentiroso	27
6. La falsa paradoja de Epiménides	32
7. La paradoja del puente	35
8. La paradoja (o el dilema) del cocodrilo	37
9. La paradoja de los caníbales	37
10. La paradoja de la tarjeta de Jourdain	38
11. La paradoja de Yablo	39
12. La paradoja (y otros hallazgos) de Cantor	40
13. Las paradojas de Russell	43
14. La paradoja de Grelling	47
15. La paradoja de Berry	52
16. La paradoja de Curry	53
17. ¿Para qué hemos conocido estas paradojas?	54
CUESTIONARIO # 1	56
	57

CAPÍTULO 2 FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y PARADOJA DE RUSSELL	Resumen	60
	1. El problema de los fundamentos de la matemática	61
	2. Logicismo	62
	2. 1. Teoría de los tipos lógicos	65
	2. 1. 1. Teoría simple de los tipos	65
	3. Axiomatismo	68
	4. Intuicionismo	71
	5. Formalismo	76
	6. Platonismo	81
	7. Dialeteísmo	88
	8. Balance final	99
		100
	CUESTIONARIO # 2	
CAPÍTULO 3 ANÁLISIS LÓGICO DE LA PARADOJA DE PROTÁGORAS	Resumen	103
	1. El relativismo de Protágoras	104
	2. La paradoja de Protágoras	108
	3. Análisis lógico de la paradoja de Protágoras	114
	3.1. La solución legal-moral	116
	3.2. La solución de Leibniz	120
	3.3. La solución interpretativa	122
	3.4. La disolución analítica	126
	3.5. La solución de Rescher	129
		131
	CUESTIONARIO # 3	
CAPÍTULO 4	Resumen	134
	1. Falacia	135
	2. Paradoja	138
	2. Clasificación de las paradojas de Quine	143
	3. Pseudoparadojas	147
	4. La metafísica eleática	148

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA COMO UNA FALACIA	5. Paradoja de Aquiles y la Tortuga	149
	6. Falacia del continuo	156
	7. La relación entre el “Aquiles” y la falacia del continuo	159
	CUESTIONARIO # 4	160
CAPÍTULO 5 SOBRE LA PARADOJA DE EPIMÉNIDES	Resumen	163
	1. Introducción	164
	2. Definición de paradoja	166
	3. La paradoja del Mentiroso	171
	4. La paradoja de Epiménides	173
	5. Conclusiones	178
	CUESTIONARIO # 5	178
CAPÍTULO 6 DISOLVIENDO LA PARADOJA DE CURRY	Resumen	181
	1. Lógica y paradojas	182
	2. Conociendo la paradoja de Curry	192
	3. Tres paradojas relacionadas	197
	4. La paradoja de Curry bajo las lupas clásica y no-clásica	207
	5. Examinando críticamente a Curry	222
	5.1. Lógica formal versus lógica no formal	227
	5.2. La perspectiva pragmática	234
	6. La paradoja de Curry y la falacia de énfasis	245
	7. Aportes de esta investigación	249

	CUESTIONARIO # 6	253
CAPÍTULO 7 USO DE LAS PARADOJAS PARA ENSEÑAR LÓGICAS NO CLÁSICAS	Resumen	256
	1. Lógica formal	257
	1.1. ¿Qué conocimientos debería tener un alumno?	258
	2. Definición de paradoja	260
	3. La importancia del estudio de las paradojas	261
	4. Las paradojas como motivaciones para enseñar lógicas no clásicas	264
	5. Conclusiones	278
	CUESTIONARIO # 7	280
CAPÍTULO 8 EL SIGNIFICADO PARADÓJICO DE: “SI TODO ES X, NADA ES X”	Resumen	283
	1. Estudios de lógica no jerárquica	284
	2. Paradojas en sentido coloquial	285
	3. Uso de lógica no formal y lenguaje natural	286
	4. Resultado del análisis no formal	291
	5. Uso de lógica formal y lenguaje técnico	292
	6. Aplicación de la lógica difusa	296
	7. Conclusión	299
	CUESTIONARIO # 8	300
CAPÍTULO	Resumen	303
	1. ¿Lógicas cuánticas?	304
	2. La lógica cuántica de Birkhoff y von Neumann	307

9 SOBRE LA LÓGICA CUÁNTICA	3. Interpretaciones de la lógica cuántica 316 4. Actualidad de la lógica cuántica 326 CUESTIONARIO # 9 329	
CAPÍTULO 10 LA NECESIDAD DE ESTUDIAR PARADOJAS MORALES	Resumen 332 1. La crisis moral 333 2. Los dilemas 340 3. Paradoja del quechua en el Perú 344 4. Paradoja de la tolerancia de Popper 346 5. Dilema (o paradoja) del prisionero 347 6. Paradoja del extorsionador 349 7. Paradoja de Easterlin 351 8. Paradoja del trabajo 352 9. Paradojas de la paz en el mundo 353 10. Paradoja del hambre en el mundo 355 11. Paradoja de la democracia 357 12. Paradoja de la unanimidad 358 13. Paradoja del libertino 360 14. Paradoja de la suerte moral 362 15. Paradoja de la votación 363 16. Paradoja de la educación y el trabajo 365 17. ¿Por qué debemos discutir estas urgencias morales? 366 CUESTIONARIO # 10 369	
BIBLIOGRAFÍA DE LA OBRA		372



PRÓLOGO

El inicio de este viaje

Algunos, plácidos en el aislamiento, llevarán una existencia retirada en los gélidos glaciares de la lógica. Neurath, Hahn y Carnap, La concepción científica del mundo. El Círculo de Viena.

Se suele ver a la lógica como una disciplina carente de conexión con la realidad. A pesar de que la lógica debería recorrer cada una de las instancias de nuestras cotidianas vidas, la forma de enseñar esta materia ha dejado mucho que desear. Los antiguos profesores que se limitaban a enseñar las fórmulas clásicas como el silogismo hipotético o el intercambio de cuantificadores son los principales responsables de esta distorsionada idea de «lógica» que ha calado en las juventudes actuales. Por estas acciones, en el Perú existen poquísimas tesis sobre lógica.

En ese sentido, se ha creído que el papel del lógico consiste en realizar sus razonamientos en solitario, para luego formalizarlos usando como base tecnicismos, sistemas axiomáticos y reglas de inferencia. Desde este punto de vista, la afirmación del Círculo de Viena, que se puede leer en el epígrafe de este prólogo, es coherente. Se ha solido ver a los lógicos como personas que se alejan de la realidad concreta para

encerrarse en la jaula de sus fríos razonamientos cargados de enigmáticos símbolos artificiales. Pero este lamentable panorama debe cambiar. Este libro es una muestra de que ello es posible. Creemos firmemente que en la lógica se pone en juego nuestra espiritualidad ya que un pensamiento bien estructurado y coherente tiene que ir de la mano con una conducta virtuosa, recta y bien orientada.

Insistimos. Debe quedar claro que el propósito de este libro no consiste ni en diseñar una nueva lógica, ni en establecer nuevas reglas para razonar de manera adecuada. Para entender esto de mejor modo plantearemos una analogía con una gran obra del siglo XX.

El *Tractatus*, según Wittgenstein, se puede dividir dos partes: la que fue escrita y la que no fue escrita. Y esta última parte fue la más importante para el filósofo. No ha sido fácil comprender el sentido enigmático de esta frase. ¿A qué se refiere con lo que no ha sido escrito? Y, ¿por qué sería más importante?

Si uno lee la obra referida, le pasará como a Russell, quien creyó que el libro daba cuenta de un uso original del lenguaje y la lógica con fines metafísicos. Bertrand Russell fue premio Nobel y, además, maestro de Wittgenstein. Él consideró que el *Tractatus* expresaba la concepción figurativa del lenguaje, es decir, la idea de que el lenguaje tiene como principal objetivo representar la realidad. Para entender esto debe tomarse en cuenta que existe un isomorfismo entre el lenguaje y el mundo. El mundo (compuesto por hechos) y el lenguaje (compuesto por proposiciones) guardan relación entre sí. Cada hecho tiene una forma lógica que es una proposición y cada proposición tiene como referencia a un hecho determinado. Así, el mundo quedaba delimitado por el

lenguaje, pero este, a su vez, estaba condicionado por la lógica. Los límites del lenguaje son los límites del mundo, porque no se puede hablar de cosas que rebasen el ámbito del mundo. Si esto fuera posible, estaría permitido también rebasar los límites del lenguaje, lo cual no es dable, pues estos límites ya están fijados por la lógica y todos sus principios, reglas, axiomas y teoremas. Así, la lógica determina el ámbito de lo posible y también de lo decible. En eso radica su perfección.

Al pensar en el mundo, Wittgenstein nos invitaba a reflexionar acerca de sus límites. El mundo es estudiado por la ciencia. Los límites del mundo se reflejan en el lenguaje que usamos, el cual, a su vez, es delimitado por la lógica. Sin embargo, quedaba algo pendiente, esto es, quedaba pendiente lo que está fuera del mundo. Eso que está fuera del mundo, el no-mundo, es precisamente aquello de lo que no se puede hablar, porque el lenguaje es como un mantel que cubre la mesa que metafóricamente representa al mundo. Ese mantel no puede cubrir nada más. A pesar de ello, es lo que no se puede cubrir lo que le da su sentido a ese mantel que cubre una mesa. Si no existiera aquello que no se puede cubrir, entonces todo sería mantel o todo sería mesa y no se podría distinguir una cosa de otra. Este ámbito es lo «místico». Y en relación con lo que se planteaba líneas arriba, esta es la parte más importante para Wittgenstein, pues lo místico no se dice, sino que se muestra. Escribe Wittgenstein acerca de lo místico:

6.44 No *cómo* sea el mundo es lo místico, sino *que* sea.

6.45 La visión del mundo *sub specie aeterni* es su visión como todo limitado. El sentimiento del mundo como todo limitado es lo místico.

(...)

6.521 La solución del problema de la vida se nota en la desaparición de ese problema. (¿No es ésta la razón por la que personas que tras largas dudas llegaron a ver claro el sentido de la vida, no pudieran decir, entonces, en qué consistía tal sentido?)

6.522 Lo inexpresable, ciertamente, existe. Se *muestra*, es lo místico.

(...)

7 De lo que no se puede hablar hay que callar.

(Wittgenstein, 2009, pp. 135-137)

Russell interpretó el misticismo de otro modo¹ y Wittgenstein se alejó de esa lectura. Lo místico, para el filósofo vienés, surge cuando se contempla el mundo como una totalidad. Además, es aquello inexpresable que se relaciona al sentido del mundo y a los valores éticos,

¹ De acuerdo a Russell: «La filosofía mística, en todas las épocas y en todas las partes del mundo, se caracteriza por ciertas creencias (...).

Está, primero, la creencia en la lucidez frente al conocimiento analítico discursivo. (...)

La segunda característica del misticismo es su creencia en la unidad y su rechazo a admitir la oposición o división en ninguna parte. (...)

Una tercera característica de casi todos los metafísicos místicos es la negación de la realidad del tiempo. (...)

La última de las doctrinas del misticismo que debemos considerar es su creencia en que todo el mal es mera apariencia, una ilusión producida por las divisiones y oposiciones del intelecto analítico. (...)» (Russell, 2001, pp. 38-40). En relación a este ensayo podemos afirmar que hay cierta mística en tanto se asume que no hay oposición real entre la lógica formal y la lógica no formal.

estéticos o religiosos. De esto no se puede hablar, más bien hay que callar. Sin embargo, esto indecible de alguna manera se muestra. Esto último significa que, aunque discutamos sobre la moralidad del robo o la existencia de Dios, nunca llegaremos a un acuerdo, pues las expresiones «Robar es malo» o «Dios existe» no son proposiciones, es decir, no tienen valor de verdad y, por ende, no son verdaderas ni falsas. Esto, que es lo místico, tan solo se muestra en la vida del hombre moral que cumple con su deber o en la actitud tranquila que un creyente tiene ante el mundo. Lo místico pues no alude a una experiencia cognoscitiva sino más bien a un sentimiento. Pensemos en la cuestión específica de la existencia de Dios. Nadie cree en Dios a causa de un argumento lógico persuasivo, sino que más bien en esta decisión está comprometida su vida, sus acciones y sus creencias más íntimas.

Pues más que hablar sobre la vida, se trata de vivir nuestra vida de acuerdo a nuestros valores más propios. Por esta razón, los valores son lo más importante. Aquí se está tratando con asuntos que involucran nuestra existencia, nuestras convicciones, nuestra mirada del mundo. Después de esta explicación se puede intentar comprender por qué para Wittgenstein el tema principal de ese libro al que tituló *Tractatus* no es la lógica, sino más bien la ética.

Algo semejante ocurre con este libro. Aquí no se ha tratado de exponer un tema de pura lógica, ni tampoco sobre pura educación. El objetivo de este trabajo ha sido el de mostrar al lector que, en principio, es posible desarrollar el pensamiento crítico e inculcar valores morales en aquellos a quienes les preocupa la dirección que están tomando las sociedades a nivel global. No todo es culpa de los gobiernos. Los

ciudadanos también parecen estar más preocupados por cosas banales (relacionadas, por lo general, a las redes sociales, la televisión, la radio y otras TICs) que, por discutir cuestiones vitales como el cambio climático, la mala redistribución de la riqueza o la falta de solidaridad en la actualidad. Podría argumentarse que la ciudadanía es presa también de los medios de comunicación masiva. No obstante, es tiempo que las personas estén dispuestas a despertar de este largo sueño en el que han sido inducidos gracias a las maravillas de la seductora tecnología actual.

Una de las primeras cosas que le motiva a uno a escribir un libro como este tiene que ver con el hecho de haber escuchado alguna vez acerca de los grandes hombres de nuestro pueblo. Aunque los medios no lo difunden como antes, lo cierto es que han existido sabios ilustres. Como escritor, una de las principales preocupaciones tiene que ver con saber para quién estoy escribiendo, qué personas estarán en el futuro leyendo estas líneas y valorando este esfuerzo. En principio, es el amor a la patria lo que le anima a cualquiera a intentar devolverle a nuestro país la grandeza, y sobre todo la esperanza, de que sí es posible salir de las ruinas, no solo económicas, sino morales en la que el Perú está hundido desde hace mucho tiempo. Asimismo, la idea también ha sido la de mostrar que la lógica tiene cierto compromiso social. No solo se trata de un conjunto de conocimientos alejados de nuestra vida cotidiana. En realidad, puede servir si se sabe aplicarla con sabiduría.

Ciertamente, este escrito podría contener algunos vacíos e incluso sería propicio esgrimirle algunas críticas con el fin de enriquecer el conocimiento humano. No hay razones para afirmar que este trabajo ha descubierto la pólvora, ni tampoco existe la pretensión de decir algo

absolutamente nuevo, pues seguramente los pensamientos aquí vertidos han sido concebidos por más de una persona anteriormente. En ese sentido, el autor de esta obra considera que no puede darse el lujo de creer que está siendo original y novedoso. La real intención de este trabajo ha sido la de mostrar los pensamientos más íntimos de un sujeto que ha vivido los primeros años de su vida, entusiasmado y enamorado de la lógica porque creía que se trataba de algo permanente, inmutable y absoluto y, a la vez, una importante rectora de los procesos humanos de comunicación cotidiana y social. Al mismo tiempo, se quiere reivindicar a las paradojas y darles su verdadero lugar en nuestra existencia, con el fin de que las generaciones venideras asuman el reto y difundan la necesidad de resolver o de al menos discutir la breve lista de urgencias morales. Incluso, podrían añadirles nuevas paradojas y legar, de nuevo, a los futuros hombres y mujeres del siguiente siglo el trabajo que no puedan terminar debido a lo corta de nuestra natural duración en este mundo. Ojalá siquiera esto último sea lo que ocurra con este texto con el devenir del tiempo.

Rafael Félix Mora Ramirez
Dr. en filosofía
Docente de la Universidad Nacional Federico Villarreal
Presidente del Instituto Peruano de Investigación de Lógica y
Filosofía (IPILOF)
Lima, 6 de enero del 2025

PRIMERA PARTE:

PARADOJAS COMO DESAFÍOS MENTALES Y MORALES



CAPÍTULO 1 CONOCIENDO A LAS PARADOJAS

Resumen: En este capítulo se considera a las paradojas como desafíos mentales. En ese sentido, revisamos la historia de la contradicción, pues esta última es un rasgo propio en la mayoría de las paradojas. Asimismo, distinguimos entre aporías y antinomias, definimos y clasificamos a las paradojas y concluimos este primer capítulo tratando acerca de las paradojas más conocidas, como la paradoja del mentiroso y la de Russell con el fin de que aprendamos a apreciar el valor y la dificultad de tales argumentos.

1. Breve historia de la contradicción

Un elemento fundamental de la paradoja es la contradicción. Enseguida, estudiaremos cómo se ha desarrollado históricamente este concepto tomando como base a Priest (2007). En la tradición occidental existe un filósofo apodado «El Oscuro». Su nombre era Heráclito. Él, considerado como el padre de la dialéctica, afirmaba que el mundo está en cambio permanente pues «todo fluye». Incluso llegaba a sostener que «todo es y no es» dado que, por ejemplo, lo positivo y lo negativo (los opuestos, los contradictorios) persisten en un solo modo de existencia. Pensemos en los átomos: electrones (lo negativo) y protones (lo positivo) forman un mismo ser a pesar de ser contradictorios. Además, los opuestos se necesitan mutuamente para existir pues, por poner un caso, la salud y la enfermedad no se entenderían aisladamente, es decir, una sin la otra. Podemos mencionar frases legadas por la tradición que reflejan la postura heracliteana: «Si quieres paz, prepárate para la guerra», «Del odio al amor hay tan solo un paso», «No hay mal que por bien no venga». En estos casos, la contradicción es patente.

La postura de Heráclito también se suele representar con la imagen del río. Según Heráclito, nadie se baña dos veces en un mismo río. Esto significa que, dado que las aguas del río siempre están en movimiento, entonces el río no es el mismo, pues sus aguas no siempre son las mismas. Por lo tanto, quien se bañe en una primera oportunidad no podrá volverse a bañar una segunda vez en ese mismo río, dado que el río ha cambiado de aguas y, por eso, no es el mismo río estrictamente. En realidad, es un río diferente.

Heráclito ya era testigo de cómo la realidad se organizaba no a pesar, sino gracias a la contradicción. Habría que esperar un poco más a que llegara Sócrates para que se usara este concepto de modo brillante en los intercambios dialógicos. En el *Hippias Mayor* (Platón, 1985), Sócrates preguntó qué era la belleza. Su interlocutor, Hippias, le respondió que una bella mujer era ejemplo de algo bello. Sócrates aceptó el ejemplo, pero aplicó su pensamiento crítico y preguntó si también eran bellos un bello burro y una bella cacerola. Hippias asintió y agregó que la más bella cacerola era fea en comparación con una bella mujer. Ante esto, Sócrates respondió que de la misma forma una bella mujer será fea en comparación con un dios. Una vez que Hippias aceptó que así era, Sócrates detectó la contradicción y se la increpó, pues antes había afirmado que una bella mujer era algo bello y ahora decía que una bella mujer era fea en comparación a un dios, pero nada puede ser bello y feo al mismo tiempo. Sócrates triunfaba con su estrategia dialéctica y usaba la contradicción magistralmente a su favor.

A esto se le conoce como argumento rebotante. Este es un artilugio racional que consiste en refutar al interlocutor usando sus mismas palabras. Por ejemplo, si alguien me dice que no hay verdad porque todo el mundo miente entonces es fácil preguntarle: «¿Pero lo que tú dices acaso no es verdad?». Ante esto, el otro responderá: «Sí. Lo que yo digo es que no hay verdad. Y eso debe ser verdad». Una vez dicho esto podemos replicarle: «Entonces, ¿no te estás contradiciendo al decir, en principio, que no hay verdad, y luego, afirmando que después de todo es verdad que no hay verdad?». Esta es, precisamente, la estrategia de conversación usada por Sócrates.

Aristóteles, padre de la lógica antigua, sistematizó los tres principios lógicos para aclarar la naturaleza de aquello que podemos llamar racional. A nivel metafísico, el principio de identidad afirma que las cosas son lo que son y no otra cosa. El principio de tercio excluso sostiene que las cosas tienen una propiedad determinada o no la tienen. Finalmente, el principio de no contradicción asegura que las cosas no pueden tener y no tener la misma propiedad a la vez. Este último principio es el que firmaba la sentencia de muerte de Heráclito y sus seguidores. Y aunque hubo pequeños brotes de pensadores que intentaron revivir el tema de que ciertos elementos fundamentales de la realidad eran contradictorios (como Tertuliano (1975) con su «creo porque es absurdo» y Nicolás de Cusa (1984) con su *Docta ignorantia*)², tuvo que llegar el siglo XIX para que esto fuera sistematizado por Georg Hegel.

Hegel afirmó que la misma realidad es contradictoria pues está en desarrollo dialéctico mediante negaciones continuas hacia lo absoluto. Para él, lo real parte de una afirmación (tesis), la cual es negada (antítesis) y, finalmente, lo real vuelve a negarse (síntesis) y el proceso inicia otra vez. Según Hegel, las cosas están dejando de ser, por ejemplo, la Idea en sí se vuelve Idea fuera de sí y, finalmente, llega a ser Idea para

² En el caso de Tertuliano dicha frase recomienda creer y no intentar entender a profundidad los misterios que envuelven la santidad de Cristo. Efectivamente, que el hijo de Dios haya sido crucificado, que se haya muerto y que después haya resucitado es de lo más absurdo, sin embargo, eso no debe mellar nuestra capacidad de creer. Nicolás de Cusa es mucho más explícito. Él afirma que en lo infinito todos los opuestos coinciden, por ende, Dios, objeto metafísico infinito por excelencia, es tanto el ser más grande como el ser más pequeño. Esto explica que el intelecto humano no se encuentre preparado para poder conocer la verdad de Dios pues nuestro saber de la verdad es una progresión infinita. Así, en la aspiración por el saber llegamos a reconocer nuestra ignorancia. A esto se le conoce como *docta ignorantia*.

sí. Asimismo, el Espíritu subjetivo se vuelve Espíritu objetivo y culmina su proceso en el Espíritu absoluto. Su esquema dialéctico más conocido es aquel que trata sobre el amo y el esclavo, mediante el cual se establece que, si bien el amo somete al esclavo, el primero necesita al segundo para poder establecer su señorío y en tanto lo necesita, el esclavo es quien realmente logra su autonomía, pues a pesar de obedecer deseos ajenos, actúa conforme a sus propios deseos, por ejemplo, en cuanto descubre que el trabajo le genera creatividad y libertad. Esta es la versión idealista de la dialéctica. Pero, ahora, veamos brevemente su versión materialista.

Marx fue un hegeliano de izquierda. Él diseñó el denominado «Materialismo histórico», que aplica la dialéctica a temas sociales. Por ejemplo, Marx interpretó que el Estado era un instrumento de dominio de una clase sobre otra. En ese sentido, consideró que el derecho (constituido por leyes jurídicas) se ha establecido para favorecer a unos cuantos privilegiados en perjuicio de las inmensas mayorías. De ese modo, consideró que la lucha de clases es el motor de la historia, pues la historia siempre está configurada por dos protagonistas contradictorios entre sí: un oprimido y un opresor. En nuestro tiempo estamos viviendo la dinámica dialéctica de los burgueses y los proletarios. Esta debería generar un conflicto entre las fuerzas productivas y las relaciones de producción, lo cual culminará en una gran revolución que lleve al ser humano hacia la última etapa de la humanidad, a saber, el comunismo, según el esquema marxista básico.

Después de conocer a grandes rasgos la historia de cómo los pensadores han concebido y utilizado la contradicción, proporcionaremos un resumen de este capítulo. En esta parte del trabajo,

conoceremos la distinción un tanto mínima entre aporías y antinomias para aclarar lo que queremos dar a entender cuando hablamos sobre paradojas. Enseguida, se ofrece una definición de paradoja y se analizan algunas clasificaciones de paradojas. Luego, se tratan las principales paradojas legadas por la tradición. Estudiamos la paradoja del mentiroso, la falsa paradoja de Epiménides, la paradoja del puente, el dilema (o la paradoja) del cocodrilo, la paradoja de los caníbales, la paradoja de la tarjeta de Jourdain, la paradoja de Yablo, la paradoja (y otros hallazgos) de Cantor, las paradojas de Russell, la paradoja de Grelling, la paradoja de Berry y, finalmente, la paradoja de Curry. Terminamos este capítulo dando cuenta del objetivo que perseguimos al presentar todas estas paradojas.

2. Aporías y antinomias

Las paradojas forman parte de una familia más amplia de argumentos problemáticos. Entre esos argumentos podemos ubicar a las aporías y las antinomias. Las aporías son callejones sin salida. Tradicionalmente, se conocen las aporías aristotélicas como casos emblemáticos donde sobre un asunto se proponen dos opciones contradictorias que son las únicas disponibles o las más evidentes. El problema es que cada una de estas opciones cuenta con diversas razones que las sustentan. Por ejemplo, Aristóteles (1998) plantea la aporía de si amarse a uno mismo es algo virtuoso o vergonzoso. El problema radica en cómo entender aquello de «amarse a sí mismo». Por un lado, se suele decir que uno debe tratar de ser amigo de sí mismo, pues eso rebela cierto estado de bienestar e incluso de salud mental. Pero, por otro lado, se

piensa que cuando uno prioriza para sí mismo la consecución de bienes vinculados al dinero o al placer sensorial extremo, entonces está yendo por mal camino. Esta es una aporía y en la *Metafísica* de Aristóteles (1994) existen otras más.

Las antinomias vienen dadas por la conjunción de una proposición y su negación. Sin embargo, tanto dicha proposición como su negación se pueden defender o demostrar. En este último rasgo radica su carácter problemático. Por ejemplo, Kant (2009) expuso la antinomia acerca del origen del mundo. Por un lado, el mundo tiene un comienzo en el tiempo y también posee límites en el espacio. Si no fuera así, entonces no podría decirse que el mundo alguna vez aconteció. Por otro lado, el mundo no tiene ningún comienzo en el tiempo ni tampoco límites en el espacio. Si no fuese así y el mundo tuviese un inicio, entonces tendría que admitirse una nada previa, pero de la nada, nada puede surgir. Esta es una antinomia. Kant sostuvo que las antinomias se producían al intentar pensar sobre lo incondicionado o sobre la naturaleza de la realidad trascendente mediante categorías que no han sido diseñadas adecuadamente para tratar aquellos temas.

3. Definición de paradoja

Las paradojas son definidas por Clark (2009) como aquellas argumentaciones en las que, partiendo de premisas aceptables y a través de métodos aceptables de raciocinio, se derivan en conclusiones inaceptables. Por ejemplo, prestemos atención a la siguiente paradoja planteada por Dwight Schrute en la serie de comedia *The Office*.

Jim es mi enemigo. Pero resulta que Jim también es su peor enemigo. Y el enemigo de mi enemigo es mi amigo. Entonces Jim, en realidad, es mi amigo. Pero, debido a que él es su propio peor enemigo, el enemigo de mi amigo es mi enemigo, así que en realidad Jim es mi enemigo. (Daniels y otros, 2005-2013)

En este caso, se parte de tomar en cuenta que Jim es mi enemigo, pero si Jim es su propio peor enemigo y considerando que el enemigo de mi enemigo es mi amigo, entonces se concluye que Jim es mi amigo. Ahora bien, si Jim es mi amigo, dado que él es su propio peor enemigo y tomando en cuenta que el enemigo de mi amigo es mi enemigo, entonces se puede concluir que, en realidad, Jim es mi enemigo. Se ha probado que Jim es mi amigo y mi enemigo. Lo anterior cumple con los requisitos como para ser considerado una paradoja.

Otros pensadores como Piscoya (1995b) y García Zárate (2007) coinciden en definir a la paradoja como aquella situación generada por una sentencia cuya suposición de verdad desemboca en su falsedad y cuya suposición de falsedad desemboca en su verdad. Como casos paradigmáticos que ejemplifican esta definición se puede proponer las paradigmáticas paradojas del mentiroso y de Russell, que veremos más adelante.

También se suele decir que los ingredientes cruciales en una paradoja son la contradicción, la circularidad y la autorreferencia, aunque la consideración de que todos y cada uno de estos elementos son caracterizadores de paradojas es muy discutible y eso se verá con ejemplos concretos.

4. Clasificación de paradojas

Existen muchas maneras de clasificar a las paradojas, pero inevitablemente siempre quedarán fuera algunos ejemplares y, además, a veces es necesario definir estrictamente el concepto de paradoja para limitar su número. La clasificación más conocida es la que las ordena en dos tipos: paradojas semánticas y paradojas lógicas. Esta fue propuesta por Ramsey (1931). Paradojas semánticas serían la paradoja del mentiroso y todas sus variantes, entre las cuales consideramos a la tarjeta de Jourdain, la de los caníbales y la del puente. Las paradojas semánticas surgen por consideraciones lingüísticas y se evitan prohibiendo la autorreferencia en algunos casos. En cambio, las paradojas lógicas son de otra naturaleza. Paradojas lógicas serían la paradoja de Russell y todas sus variantes, entre las cuales consideramos a la paradoja de las relaciones³, la de las propiedades⁴, del barbero, la de los catálogos y la de los alcaldes.

³ La paradoja de las relaciones surge cuando consideramos si un objeto dado puede o no relacionarse consigo mismo. Podríamos suponer que un objeto desconocido x se relaciona con un objeto determinado «a» si y solo si dicho objeto x no se relaciona consigo mismo. Ahora bien, si esto fuera cierto, podemos pensar en el propio objeto «a» para reemplazar a x y así obtendríamos la paradoja, a saber, un objeto «a» se relaciona con «a» si y solo si dicho objeto «a» no se relaciona con «a». (Russell, 1983)

⁴ La paradoja de las propiedades guarda mucha semejanza con la paradoja de Grelling. Por un lado, una propiedad es «predicable» cuando se predica de sí misma. Ejemplo, «pensable» es pensable, por ende, «pensable» es predicable. Por otro lado, una propiedad es «impredicable» cuando no se predica de sí misma. Ejemplo, «ser viviente» no es un ser viviente, por ende, «ser viviente» no se predica de sí misma, es decir, es impredicable. Ahora bien, consideremos la misma expresión «impredicable», ¿qué tipo de propiedad es? Si «impredicable» es predicable, se predica de sí misma. Eso significa que «impredicable» es impredicable. Y si «impredicable» es impredicable entonces no se predica de sí misma. Eso significa que «impredicable» no es impredicable, es decir, por doble negación «impredicable» es predicable. Esta es la paradoja de las propiedades. (Russell, 1983; Kleene, 1974)

Las paradojas lógicas se relacionan con conceptos elementales de la teoría de las clases (o conjuntos) y se evitan limitando de cierta manera algunos axiomas básicos.

Quine (1976) dividió las paradojas en tres tipos: las antinomias, las paradojas verídicas y las paradojas falsídicas. Las antinomias son realmente problemáticas y suponen que cambiemos o reformemos seriamente nuestro marco teórico inicial. Ejemplos clásicos son la paradoja del mentiroso o la paradoja de Russell. Las paradojas verídicas, en realidad, exponen un resultado que en apariencia es problemático, sin embargo, esto se disipa al entender que se trata de un resultado justificable. Por ejemplo, la paradoja de Galileo es una paradoja verídica, puesto que demuestra algo que, en realidad, es correcto, a saber, que en los conjuntos infinitos la parte puede llegar a ser tan grande como el todo. Las paradojas falsídicas, en cambio, exponen un resultado problemático, pero como producto de una equivocación. Por ejemplo, existe una demostración de que $2=1$ y se basa en lo siguiente. Si $x=1$, entonces al multiplicar por x ambos miembros de la ecuación queda $x^2=x$. Luego, restando 1 a cada miembro tenemos $x^2-1 = x-1$. Por diferencia de cuadrados, obtenemos, $(x-1)(x+1) = x-1$. Ahora bien, dividiendo por $x-1$ en ambos lados nos queda $x+1=1$. Finalmente, reemplazamos x por 1 como era la suposición inicial y tenemos que $2=1$. Sin embargo, el error de esta deducción se basa en aceptar la división por $x-1$ pues si consideramos que $x=1$ entonces $x-1$ sería cero y así se habría efectuado disimuladamente una división por cero, lo cual no está permitido en matemáticas elementales. Por ende, lo anterior es una paradoja falsídica, es decir, engañosa.

Bunge (2007) tiene otra división más simple. Por un lado, están las contradicciones clásicas que se clasifican en paradojas lógicas y paradojas semánticas. En este punto, Bunge coincide con Ramsey. Sin embargo, por otro lado, tenemos las paradojas entendidas como resultados contraintuitivos. Como caso de este último tipo menciona a algunos hallazgos de la física cuántica, como, por ejemplo, la paradoja del gato de Schrödinger. También, Bunge considera a las paradojas de la lógica inductiva⁵ como la paradoja *verdul*⁶ y la paradoja del cuervo⁷ como pseudoproblemas.

⁵ Existen razonamientos cuyas conclusiones son establecidas solo de modo probable. Por ejemplo, si mi equipo de fútbol favorito está ganando dos partidos seguidos, es posible que quiera apostar por este, pues considero que es probable que gane la próxima contienda. La lógica inductiva busca estudiar los criterios para establecer la corrección de razonamientos inductivos aceptables (Da Costa, 2000).

⁶ Esta paradoja fue planteada por Goodman (1955) y pone en cuestión los fundamentos del razonamiento inductivo. Supongamos que existen esmeraldas que, hasta una fecha futura F, son de color verde. Sin embargo, después de F, todas estas esmeraldas cambian a color azul. A partir de este escenario, podemos introducir un nuevo predicado: «verdul», que se define de la siguiente manera: Una esmeralda es verdul si, antes de la fecha F, es verde, y después de F, es azul.

El problema surge cuando notamos que, antes de F, toda la evidencia empírica observada (por ejemplo, haber visto 1000 esmeraldas verdes) apoya simultáneamente las siguientes generalizaciones: Todas las esmeraldas son verdes y Todas las esmeraldas son verdules. Ambas generalizaciones son compatibles con la evidencia disponible antes de F, porque hasta ese momento las esmeraldas son indistinguibles en términos de su color: todas se ven verdes. Sin embargo, hay una tensión lógica, ya que no pueden ser *solo verdes* y *verdules* al mismo tiempo, dado que después de F las predicciones divergen.

Para reforzar el punto, imaginemos que encontramos una esmeralda antes de F. Podremos observar que esta se ve verde, lo que confirma que es «verde» según la definición usual del color. Pero esta misma observación también confirma que es «verdul», porque las esmeraldas verdules se ven verdes antes de F. La paradoja, entonces, reside en que ambas hipótesis parecen igualmente confirmadas por la evidencia previa a F, aunque sus predicciones después de F son mutuamente excluyentes.

⁷ Esta paradoja fue planteada por Hempel (1945) y se origina a partir de una equivalencia denominada «transposición». De este modo, «Todo cuervo es negro» equivale a «Todo lo no-negro es no-cuervo». Siendo así, podemos confirmar que todo cuervo es negro al ver, por ejemplo, un tomate pues dicho enunciado equivale a que todo lo que no es negro es no cuervo y un tomate es un objeto no negro que también es un no cuervo.

Scruton (2003) plantea que existen dos tipos de paradojas: las que desafían algunas ideas fuertemente arraigadas y las que, iniciando con premisas aceptables, deducen una contradicción. Como casos del primer tipo menciona a las paradojas de la implicación material y de la implicación estricta, las mismas que se basan en ciertas críticas a la estructura de la tabla de verdad de la condicional en lógica clásica. Además, también incluye a la paradoja de Aquiles y la tortuga, la de la inferencia⁸, la de Galileo y la de los números transfinitos de Cantor. Paradojas del segundo tipo constituyen la paradoja del mentiroso y la paradoja del montón, por ejemplo.

También se puede decir que existen dos sentidos de paradojas: el sentido coloquial y el sentido técnico (García, 2014). En sentido coloquial, una paradoja es una expresión extraña que manifiesta una idea poco común que requiere interpretación y que, desde luego, encierra alguna contradicción comprensible desde cierto punto de vista⁹. Por

⁸ La paradoja de la inferencia se plantea cuando un escéptico duda del *Modus Ponens*, regla según la cual de dos enunciados de la forma « $A \rightarrow B$ » y « A » se deduce « B ». El escéptico nos exigiría que lo probemos. Si decimos que el enunciado C , a saber,

C: Si « $A \rightarrow B$ » y « A » son verdad, « B » tiene que ser verdad

es un enunciado verdadero, el escéptico podría replicar que no estamos obligados a deducir B a partir de « $A \rightarrow B$ », « A » y « C », hasta que no demos que

D: Si « $A \rightarrow B$ », « A » y « C » son verdad, « B » tiene que ser verdad.

Y el proceso puede continuar exigiendo la prueba de E , F , G y así sucesivamente.

⁹ Kant (2006) sostiene que el hombre posee una insociable sociabilidad. Esta idea es, desde luego, paradójica. Su significado es interesante. Para Kant, el hombre es sociable porque siempre tiende a formar parte de grupos sociales. Sin embargo, al mismo tiempo es capaz de seguir únicamente sus impulsos y deseos egoístas para así aislarse del grupo general y, en consecuencia, volverse insociable. Esta es la insociable sociabilidad kantiana del ser humano. Algo análogo podemos decir de la situación política del Perú del 2022. Estamos bajo una estable inestabilidad. Esto significa que vivimos desde hace mucho tiempo bajo la inestabilidad de la lucha de los poderes ejecutivo y legislativo, no obstante, ese mismo hecho nos permite aceptar que existe cierta estabilidad pues la situación política realmente no suele dar cambios tan bruscos y cuando los

ejemplo, «en mi debilidad está mi fortaleza». Dicha frase es paradójica porque conjunta dos ideas contradictorias entre sí: debilidad y fortaleza. Sin embargo, esto se puede interpretar aduciendo que, efectivamente, cada vez que reconocemos alguna de nuestras debilidades somos capaces de fortalecernos para superar todos los obstáculos que tengamos ante nosotros¹⁰. Presentamos algunos otros ejemplos:

- 1-Todos somos iguales, pero unos más iguales que otros.
- 2-El hombre es como el oso mientras más feo, más hermoso.
- 3- La suerte de la fea la bonita la desea.
- 4-Me da pena ser tan cruel.
- 5-Caminante no hay camino, se hace camino al andar.
- 6-¡Qué estúpido fui al pensar que era estúpido!
- 7-Es de mala suerte ser supersticioso.
- 8-Voy a hacer una marcha en contra de todas las marchas.
- 9-Está prohibido prohibir.
- 10-Soy ateo gracias a Dios.
- 11-Hay sumas que restan.
- 12-Nunca digas nunca.

En un sentido técnico, una paradoja se genera a partir de una expresión cuya suposición de verdad deriva en una falsedad y cuya suposición de falsedad deriva en una verdad. En este sentido, una paradoja se puede definir como un argumento que, partiendo de

da, la población protesta y restituye cierto tipo de orden. Esta es la estable inestabilidad del Perú del 2022.

¹⁰ También se puede interpretar «ser débil» como «ser resistente». De este modo, la persona débil es aquella que resiste los deseos de, por mencionar un caso, golpear a quien le ha agredido físicamente. Precisamente, en esa debilidad radica su fortaleza, en este caso, tratamos de fortaleza espiritual.

premisas aceptables y mediante procedimientos aceptables, deriva en una conclusión inaceptable (contradictoria por lo común). Esta conclusión inaceptable es del tipo «Si A es verdad entonces A es falsa y si A es falsa entonces A es verdad». Las paradojas del mentiroso y de Russell encabezan la lista de paradojas en sentido técnico.

5. El desafío de la paradoja del mentiroso

Para comprender el siguiente grupo de paradojas basta que uno sea un hablante competente en el lenguaje. La propuesta de Alfred Tarski (1997) constituye una teoría de la verdad¹¹. De modo resumido, Tarski afirmó que una oración es verdadera siempre y cuando lo que afirme sea real y, de modo complementario, una oración es falsa siempre y cuando lo que afirme no sea real. Por ejemplo, «La pelota es roja» es verdadera siempre y cuando la pelota sea roja; «La bicicleta está oxidada» es falsa siempre y cuando la bicicleta no esté oxidada¹². Tarski fue un lógico polaco que construyó su concepción semántica de la verdad reflexionando en torno a la paradoja del mentiroso. Esta paradoja se expresa de modo tremendamente simple. Alguien pronuncia la siguiente y única expresión: «Lo que estoy diciendo ahora es falso». Dicha expresión entrecomillada, que llamaremos *oración M*, ¿es verdadera o es falsa? Presentaremos una versión más comprensible para que se pueda

¹¹ Dicha propuesta no es la única teoría de la verdad. Pero el valor de esta teoría es que fue la primera que utilizó de modo creativo la paradoja del mentiroso. Para conocer más detalles al respecto de las teorías de la verdad se recomienda Barrio (2014).

¹² La definición tarskiana de la verdad es la siguiente:

P es verdad si y solo si *P*

P es falso si y solo si $\sim P$

Esto significa que podemos reemplazar «*P es verdad*» por *P* y «*P es falso*» por $\sim P$.

entender lo que está sucediendo. Veamos el siguiente sistema de oraciones

* Aquí hay tres falsedades.

1. Lima es capital del Perú

2. El agua es H_2O

3. 2 más 2 es igual a 5

¿Cuál es la tercera falsedad?

Después de una inspección detallada nos daremos cuenta que la única expresión que podría ser falsa es *, es decir, la oración que afirma que hay tres falsedades. Sin embargo, ocurre un problema porque si * es falsa, entonces se darían las tres falsedades y, por ende, * sería verdadera y si * fuese verdadera, ya no habría tres falsedades y, por ende, * sería falsa. Esta es una situación paradójica.

Pero volvamos a la *oración M*, es decir, a «Lo que estoy diciendo ahora es falso». Resolver ese asunto era un verdadero desafío porque cualquier respuesta llevaba a un contrasentido. Si suponemos que lo dicho es una verdad, entonces es falsa pues la expresión afirma de sí misma que es falsa. Así, por reducción al absurdo podemos afirmar que no es verdadera. Y si asumimos que es falsa, entonces es verdadera porque estaríamos confirmando lo que la misma expresión dice sobre sí misma. Así, por reducción al absurdo podemos afirmar que no es falsa. Estamos ante una expresión que no es verdadera ni falsa y eso, la lógica clásica no lo admite, pues va en contra del principio del tercio excluso¹³.

¹³ Es posible también probar que la clásica expresión del mentiroso «Esta oración es falsa» es una expresión verdadera y falsa a la vez y en este caso, se debe afirmar que el mentiroso atenta contra el principio de no contradicción. Si se opta por esta vía, se recomienda intentar diseñar una lógica paraconsistente que sea capaz de soportar la contradicción.

Este principio afirma que una proposición dada es verdadera o es falsa. Por este motivo, los lógicos han diseñado la lógica paraconsistente que trata de estudiar este tipo de casos donde no se cumple este principio. En términos argumentales, la paradoja del mentiroso se puede expresar de la siguiente manera:

1. Toda proposición es verdadera o falsa (Principio del tercio excluso)

2. La oración M expresa una proposición (Principio de significatividad)

C. La oración M no es verdadera ni falsa

Esta paradoja fue tan compleja en su momento, que un griego llamado Filetas de Cos la pensó tanto que se olvidó de comer, beber, bañarse y dormir y así, se murió sin poder resolverla. Pero quien sí pudo detener su impacto desestabilizador de la razón fue Tarski. La disolución propuesta por Tarski tuvo que ver con los niveles del lenguaje. Específicamente, analizó con detalle el tema de la autorreferencia. Existen frases que hablan sobre otras frases. Por ejemplo, «El título de este libro comienza con mayúscula». Si las frases pueden hablar sobre otras frases, también pueden hablar sobre sí mismas. Curiosamente, eso es lo que permitía el surgimiento de paradojas, como la del mentiroso.

En ese sentido, Tarski creyó prudente separar los niveles del lenguaje. Así, las frases que se refieren a cosas del mundo estarán ubicadas en un nivel 1. En cambio, las frases que de alguna manera se refieren al mismo lenguaje estarán ubicadas en un nivel 2. Con esta estrategia se podía notar lo que sucedía en la paradoja del mentiroso. Los niveles se confunden, es decir, del nivel 1 pasamos al nivel 2 y viceversa.

Ese comportamiento anómalo nos permite declarar a la paradoja del mentiroso como un contrasentido que surge al romper la sagrada separación de los niveles del lenguaje.

Lo mismo ocurre cuando analizamos la regla R que dice que «Toda regla tiene excepción». Dado que lo anterior se trata de una regla, entonces tiene excepción y esa excepción sería una regla sin excepciones. Por lo tanto, podemos concluir que «Hay una regla que no tiene excepción». Una forma de resolver esto es aplicando lo propuesto por Tarski. La regla R es, en realidad, una metarregla, es decir, es una regla sobre reglas y, por lo tanto, lo que esa regla dice no se podría aplicar a sí misma pues la regla R es de un nivel 2 y trata sobre reglas de nivel 1. Así, con ayuda de las ideas de Tarski, desaparece la situación paradójica.

6. La falsa paradoja de Epiménides

Una vez examinada la paradoja del mentiroso, a menudo nos topamos con otra paradoja muy relacionada, a saber, la paradoja de Epiménides (Pablo, 2001). Sin embargo, esta paradoja no es exactamente igual a la del mentiroso y, además, si uno la analiza con detenimiento descubrirá que tan solo hay una paradoja aparente. La paradoja de Epiménides se formula de la siguiente manera. Epiménides, el cretense, alguna vez dijo: «Todos los cretenses son mentirosos». ¿Esta última frase sobre los cretenses es verdadera o falsa? Cualquiera que no tenga bien alerta su pensamiento crítico puede caer en el error de considerarla una paradoja igual a la del mentiroso, pero, en realidad, este no es el caso. Vamos a examinarla con cuidado.

Si aceptamos que dicha frase es verdadera, entonces asumimos que todos los cretenses son mentirosos. Y dado que Epiménides es un cretense, entonces él mismo sería un mentiroso. Y debido a que él fue quien dijo esa frase, dicha frase sería una mentira, es decir, una falsedad. Por ende, si dicha frase es verdadera, entonces es falsa.

Por otro lado, si dicha frase es falsa, entonces asumimos que no es verdad que todos los cretenses sean mentirosos. Eso significa que algunos cretenses no son mentirosos. Sin embargo, al no tener mayor información sobre Epiménides, no podemos afirmar que él sea alguien no mentiroso. Por ende, si dicha frase es falsa, entonces dicha frase afirma que algunos cretenses no son mentirosos. Eso es todo lo que podemos deducir.

Esta es la gran diferencia con la paradoja del mentiroso. Mientras que la paradoja del mentiroso surge con una frase cuya verdad implica su falsedad y cuya falsedad implica su verdad (Piscoya, 1995b), la (falsa) paradoja de Epiménides surge con una frase cuya verdad implica su falsedad y nada más. Incluso puede afirmarse que la frase que protagoniza la paradoja de Epiménides es una simple falsedad, pues por reducción al absurdo si la suposición de su verdad nos lleva a contradicciones, debemos concluir que la frase de Epiménides no es verdadera, sino que es falsa. Y, de este modo, se concluye que la supuesta paradoja de Epiménides no es una paradoja como tal. De hecho, podría tratarse de una paradoja falsídica, en términos quineanos (Mora, 2014). Más adelante, analizaremos este par de paradojas de modo más formal.

7. La paradoja del puente

Existen otras paradojas relacionadas de alguna manera a la paradoja del mentiroso. Conozcamos algunas de ellas. Esta que conoceremos enseguida se denomina la paradoja del puente o la del Quijote (Cervantes, 1995). Un pueblo inauguró un puente único a través del cual se podría entrar. Todo el que quisiese pasar tenía que decir algo. Si lo que dijese fuese verdadero, se le debería dejar pasar; pero si lo que dijese fuese falso, se le debería colgar en la horca. Esto fue aplicado con rigor a cada uno de los pasantes, hasta que llegó un viajero y se le preguntó qué tenía que hacer en el pueblo. Este respondió: «Vengo a ser colgado». Esta respuesta representó un problema porque si lo que dijo era verdadero, entonces debía dejársele pasar. Pero si esto ocurría, entonces no sería colgado y su declaración sería falsa y al ser falsa, tendría que ser colgado. Pero si así lo hiciesen, entonces su declaración se volvería verdadera y deberían dejarlo pasar. ¿Qué es lo que se debería hacer en este caso? Notamos que la indecidibilidad de la verdad o falsedad del enunciado «Vengo a ser colgado» guarda un estrecho parecido con la paradoja del mentiroso.

8. La paradoja (o el dilema) del cocodrilo

Esta paradoja es muy parecida a la anterior, pero cambia de escenario y de personajes. Se conoce como paradoja o dilema del cocodrilo (Kleene, 1974). Un día una madre fue a lavar la ropa al río y dejó a su hijo en la orilla. Durante esa actividad, un cocodrilo acechó a la madre y consiguió arrebatarse a su niño. La madre estaba desesperada. El cocodrilo, que estaba a punto de comerse a su hijo, le propuso un trato.

Si respondía correctamente a la pregunta que le iba a hacer entonces le devolvería a su hijo, pero, en cambio, si respondiese incorrectamente, entonces se comería a su hijo. La madre algo angustiada aceptó y el cocodrilo le preguntó: ¿Me comeré a tu niño? La madre que era muy astuta dijo que sí, que el cocodrilo sí se comería a su hijo. Ahora bien, si el cocodrilo se lo comía, lo que dijo la madre sería verdad y debería devolvérselo; pero si no se lo comía, lo que dijo la madre sería falso y debería comérselo. Pero si se lo comía, sería verdad la respuesta de la madre y tendría que retornarle su niño. Y eso confundió al cocodrilo tanto que la madre aprovechó para arrebatarse a su hijo y salir despavorida.

9. La paradoja de los caníbales

Al igual que los casos anteriores, esta paradoja guarda similitud con la paradoja del mentiroso. Se le conoce como paradoja de los caníbales (Godement, 1967). Un misionero fue atrapado por una turba de caníbales que se disponían a devorarlo. Uno de los caníbales, conocido por su carácter sanguinario, le propuso al misionero un pacto. Se le haría una pregunta y dependiendo de cómo respondiese, se le daría fin a su vida. Si responde con una verdad, será hervido; si responde con una falsedad, será frito. La pregunta que le hizo fue: «¿Cómo te comeremos?». El misionero pensó con calma y respondió que sería frito. Y esto le generó un problema al salvaje caníbal, pues si lo freía, entonces él habría dicho una verdad y debería hervirlo, pero si lo hervía, él habría dicho una falsedad y, por ende, debería ser frito. El misionero aprovechó ese momento de confusión de su comensal y escapó. Exagerando un poco se puede afirmar que los dos casos anteriores muestran que la el

conocimiento de la lógica y las paradojas puede llegar incluso a salvar vidas. Por este motivo, su aprendizaje es de vital importancia para la población entera.

10. La paradoja de la tarjeta de Jourdain

Existen versiones no tan complejas que pueden replicar la situación de la paradoja del mentiroso con pocos elementos. La siguiente se denomina la paradoja de la tarjeta de Jourdain (1913). En una tarjeta hay escrito en uno de sus lados que llamaremos A: «El reverso contiene una verdad». El otro lado (el B) tiene otro mensaje: «El reverso contiene una falsedad». ¿Esos mensajes son verdaderos o falsos? Aunque no es evidente la autorreferencia directa, lo que sí se puede notar es la presencia de la autorreferencia indirecta, pues cada uno de los lados se refieren al otro lado, el cual al mismo tiempo se refiere al anterior.

Aquí se plantea un problema, porque si el lado A es verdad, entonces el lado B sería verdad, pero el lado B afirma que el lado A es falso. Así, se deduce que el lado A sería falso después de todo. Es decir, si el lado A es verdad, el lado A es falso. Ahora, si suponemos que el lado A es falso, deduciríamos que es falso que el lado B contenga una verdad, y dado que el lado B afirma que el lado A contiene una falsedad, sería falso que el lado A sea falso. Es decir, si el lado A es falso, es falso que el lado A sea falso (es decir, el lado A es verdad). De nuevo, tenemos una contradicción. Es decir, el lado A constituye una paradoja.

Lo mismo podemos decir del lado B. Si el lado B es verdad, entonces el lado A es falso, pero si fuera así, sería falso lo que afirma el lado A, esto es, sería falso que el lado B contiene una verdad. Así, si el

lado B es verdad, entonces es falso que el lado B contiene una verdad (esto es, el lado B es falso). Esta es la primera señal de una paradoja. Ahora bien, si el lado B es falso, entonces es falso que el lado A contenga una falsedad, esto es, el lado A no contiene una falsedad, por lo tanto, el lado A contiene una verdad, y lo que dice el lado A es que el lado B es verdadero. Por ende, si el lado B es falso, el lado B es verdadero. Otra vez, hay contradicción. Es decir, el lado B constituye otra paradoja. A propósito de esta versión, Alfred Tarski (2000) propuso una más extrema. Él nos invitó a imaginar un libro de 100 hojas donde en cada hoja hay escrita solamente una única oración. La oración de cada hoja afirma que la oración de la siguiente página es verdadera a excepción de la última que afirma que la primera oración de la primera página es falsa. Si razonamos adecuadamente este esquema, concluiremos que existen 100 paradojas, cada una originada por cada oración de este hipotético libro.

11. La paradoja de Yablo

La siguiente paradoja fue planteada por Yablo (1993) y tiene la virtud de que no posee autorreferencia, lo cual hace dudar acerca de si es necesaria la existencia de la autorreferencia para que exista paradoja. Imaginemos una lista de infinitas oraciones, cada una de las cuales afirma que todas las que le siguen son falsas. Escojamos una oración al azar, digamos Y.

Figura 1

La paradoja de Yablo

1. Todas las siguientes oraciones (2, 3, 4, etc.) son falsas

2. Todas las siguientes oraciones (3, 4, 5, etc.) son falsas

...

Y. Todas las siguientes oraciones ($Y+1$, $Y+2$, $Y+3$, etc.) son falsas

$Y+1$. Todas las siguientes oraciones ($Y+2$, $Y+3$, $Y+4$, etc.) son falsas

...

$Y+n$. Todas las siguientes oraciones [$(Y+n)+1$, $(Y+n)+2$, $(Y+n)+3$, etc.]
son falsas

...

Fuente: Elaboración propia

Si Y es verdad, entonces todas las que le siguen son falsas, pues eso es lo que afirma. Sin embargo, también se puede afirmar que $Y+1$ es verdad, pues también todas las que le siguen serían falsas. No obstante, si $Y+1$ es verdad, Y debe ser falsa, pues ya no sería cierto que todas las oraciones que le siguen son falsas. Así, de la suposición de la verdad de Y se deduce que Y es falsa y esto ocasiona una contradicción. De este modo, por reducción al absurdo, se infiere que Y es una falsedad.

Supongamos que Y es falsa. Si es así entonces al menos una de las oraciones que siguen son verdaderas, digamos $Y+n$. Siendo así todas las oraciones que le sigan a esta última ($Y+n+1$, $Y+n+2$, $Y+n+3$, etc.) tendrán que ser falsas. Pero, si así fuera, la que le sigue, es decir, $(Y+n+1)$ tendría que ser verdadera (porque todas las que le siguen son falsas y eso es precisamente lo que afirma) y también tendría que ser falsa (porque $Y+n$ sentencia que sus siguientes son falsas). De este modo, de la suposición

de la falsedad de Y se deduce la contradicción que sostiene que $(Y+n+1)$ es verdadera y falsa. Así, por reducción al absurdo, se infiere que Y es una verdad. Expresemos la paradoja pero de modo formal.

$$1. p_1 = \sim p_2 \wedge \sim p_3 \wedge \sim p_4 \wedge \dots$$

$$2. p_2 = \sim p_3 \wedge \sim p_4 \wedge \sim p_5 \wedge \dots$$

$$3. p_3 = \sim p_4 \wedge \sim p_5 \wedge \sim p_6 \wedge \dots$$

...

$$\alpha. p_\alpha = \sim p_{\alpha+1} \wedge \sim p_{\alpha+2} \wedge \sim p_{\alpha+3} \wedge \dots$$

$$\alpha+1. p_{\alpha+1} = \sim p_{\alpha+2} \wedge \sim p_{\alpha+3} \wedge \sim p_{\alpha+4} \wedge \dots$$

...

$$\omega. \quad \dots \quad // \therefore \sim p_\alpha$$

$$\omega+1. p_\alpha \quad // \therefore \perp$$

$$\omega+2. \sim p_{\alpha+1} \wedge \sim p_{\alpha+2} \wedge \sim p_{\alpha+3} \wedge \dots$$

Identidad $(\alpha, \omega+1)$

$$\omega+3. \sim p_{\alpha+1} \wedge (\sim p_{\alpha+2} \wedge \sim p_{\alpha+3} \wedge \dots)$$

Asociatividad $(\omega+2)$

$$\omega+4. \sim p_{\alpha+1} \wedge p_{\alpha+1}$$

Identidad $(\omega+3, \alpha+1)$

$$\omega+5. p_\alpha \rightarrow (\sim p_{\alpha+1} \wedge p_{\alpha+1})$$

Prueba condicional $(\omega+1- \omega+4)$

$$\omega+6. \sim p_\alpha$$

Reducción al absurdo $(\omega+5)$

...

$$2\omega. \quad \dots \quad // \therefore p_\alpha$$

$$2\omega+1. \sim p_\alpha \quad // \therefore \perp$$

$$2\omega+2. p_{\alpha+n}$$

Premisa adicional

$$2\omega+3. \sim p_{\alpha+n+1} \wedge \sim p_{\alpha+n+2} \wedge \sim p_{\alpha+n+3} \dots$$

Identidad $(2\omega+2, *^{14})$

$$2\omega+4. \sim p_{\alpha+n+1} \wedge (\sim p_{\alpha+n+2} \wedge \sim p_{\alpha+n+3} \dots)$$

Asociatividad $(2\omega+3)$

¹⁴ * $p_{\alpha+n} = \sim p_{\alpha+n+1} \wedge \sim p_{\alpha+n+2} \wedge \sim p_{\alpha+n+3} \dots$

$2\omega+5. \sim p_{\alpha+n+1} \wedge p_{\alpha+n+1}$	Identidad ($2\omega+4, **$ ¹⁵)
$2\omega+6. p_{\alpha+n} \rightarrow (\sim p_{\alpha+n+1} \wedge p_{\alpha+n+1})$	Prueba condicional ($2\omega+2-2\omega+5$)
$2\omega+7. \sim p_{\alpha+n}$	Reducción al absurdo ($2\omega+6$)
...	¹⁶
$3\omega. \sim p_{\alpha+n} \wedge \sim p_{\alpha+n+1} \wedge \sim p_{\alpha+n+2} \dots$	Conjunción ($2\omega+7, \dots$ ¹⁷)
$3\omega+1. \sim p_{\alpha+n} \wedge (\sim p_{\alpha+n+1} \wedge \sim p_{\alpha+n+2} \dots)$	Asociatividad ($3\omega+1$)
$3\omega+2. \sim p_{\alpha+n} \wedge p_{\alpha+n}$	Identidad ($3\omega+1, *$)
$3\omega+3. \sim p_{\alpha} \rightarrow (\sim p_{\alpha+n} \wedge p_{\alpha+n})$	Prueba condicional ($2\omega+1, 3\omega+2$)
$3\omega+4. p_{\alpha}$	Reducción al absurdo ($3\omega+3$)
$3\omega+5. \sim p_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$	Conjunción ($\omega+6, 3\omega+4$)

12. La paradoja (y otros hallazgos) de Cantor

El siguiente grupo de paradojas surgen a partir de consideraciones matemáticas. Georg Cantor (2011) fue un matemático alemán al cual se le considera como el creador de la teoría de conjuntos. En relación a esta teoría, detectó una paradoja muy interesante. Pero para poder entenderla adecuadamente, hace falta que conozcamos previamente algunos conceptos fundamentales. Un conjunto (o una clase) es una agrupación de elementos. Además, dichos elementos de un conjunto pueden ser, a su vez, agrupados en otros conjuntos. A estos se le llaman subconjuntos. Por ejemplo, si el conjunto A tiene como elementos a $\{1,2\}$, entonces el conjunto de subconjuntos de A tendrá como elementos a $\{\{1\}, \{2\}, A, \emptyset\}$.

¹⁵ $** p_{\alpha+n+1} = \sim p_{\alpha+n+2} \wedge p_{\alpha+n+3} \wedge \sim p_{\alpha+n+4} \dots$

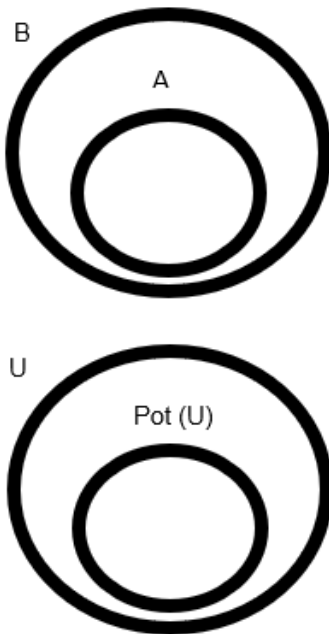
¹⁶ Este proceso (consistente en varias reducciones al absurdo anidadas y sucesivas) continúa para obtener $\sim p_{\alpha+n+1}$ y luego $\sim p_{\alpha+n+2}$ y luego $\sim p_{\alpha+n+3}$ y, así sucesivamente.

¹⁷ Los resultados anteriores (ya mencionados en la anterior nota al pie) se conjuntan todos.

Específicamente, a esto se le conoce como teorema de Cantor, dado un conjunto A con n elementos, su conjunto potencia $Pot(A)$ (es decir, su conjunto de subconjuntos) tendrá 2^n elementos. Por ende, el número de elementos de $Pot(A)$ será siempre mayor que el de A . Ahora bien, también existe otra relación fundamental entre conjuntos, a saber, la inclusión. Si A está incluido dentro de B , entonces el número de elementos de A será menor o igual a B . Conocidos estos detalles podemos empezar a comprender la paradoja de Cantor.

Todo comienza con la consideración de un conjunto especial, el conjunto universal. Este conjunto reuniría a todas las cosas y a todos los conjuntos que forman parte del mundo. Siendo así, el conjunto universal contendría como uno de sus elementos al propio conjunto universal, es decir, a sí mismo. Sin embargo, también contendría a su propio conjunto potencia, $Pot(U)$. Esta situación generaría cierta controversia.

Por un lado, el conjunto potencia de cualquier conjunto siempre tiene más elementos que el conjunto original. En consecuencia, el número de elementos de $Pot(U)$ es mayor que el de U . Por otro lado, $Pot(U)$ está dentro de U , es decir, está incluido en U . Si esto es así, entonces el número de elementos de $Pot(U)$ sería menor o igual que U . Esta es la contradicción denominada «paradoja de Cantor». Notemos que en esta paradoja no existe circularidad del tipo si P es verdad, entonces P es falsa y viceversa.

Figura 2**Explicación de la paradoja de Cantor****Relación de inclusión**

Sean A y B dos conjuntos.

Si A está incluido en B entonces

A tiene tantos o menos elementos que B

Teorema de Cantor

Si $C = \{1, 2\}$ tiene 2 elementos, entonces su conjunto potencia tendrá 4 elementos
 $\text{Pot}(C) = \{\{1\}, \{2\}, C, \emptyset\}$

Pot (C) tiene más elementos que C

Paradoja de Cantor

* Por la relación de inclusión

Pot (U) tiene tantos o menos elementos que U

* Por el teorema de Cantor

Pot (U) tiene más elementos que U

Fuente: Elaboración propia

Cantor también propuso una teoría aún más polémica: la de los números transfinitos. Si consideramos que el número de elementos del conjunto de los números naturales es infinito, la pregunta interesante sería: ¿existen números más grandes que infinito? Cantor tomó este asunto en serio. Con estas ideas, indagó acerca de la cantidad de números que existen entre 0 y 1 y descubrió a través de un procedimiento matemático complejo denominado «diagonal» que existen más números entre 0 y 1 que números existentes en todo el conjunto de los números

naturales¹⁸. En consecuencia, existen más números reales que números naturales. A partir de esto se plantea un problema. En principio, ¿cómo denominar esta nueva cantidad infinita que representa un infinito mayor que el infinito más simple conocido en matemática? Cantor denominó «álef cero» a esta primera cantidad infinita $\aleph_0$ que designa al número de elementos del conjunto de los números naturales. Enseguida, apoyado por su teorema del conjunto potencia, Cantor propuso una serie de nuevos números. Así los construyó: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$... La sucesión $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3$ fue conocida como números transfinitos. Y una pregunta que sería parte de los problemas que se encargarían de resolver los lógicos y matemáticos del futuro sería si $\aleph_1$ es el número de elementos del conjunto de los números entre 0 y 1, y si no fuera así, ¿cuál sería? A la consideración de que $\aleph_1$ sí es el número de números reales, se le conoce como la hipótesis del continuo. La cuestión radica en decidir si dicha hipótesis es verdadera o falsa. En la actualidad, gracias a los estudios de Gödel y Cohen, se considera que dicha hipótesis es independiente, es decir, una teoría de conjuntos determinada podría contener o la negación o la afirmación de dicha hipótesis sin que esto suponga mayor problema, pues es imposible que dicha hipótesis se demuestre o se refute (Mosterín, 1980).

¹⁸ Para comprender esto es necesario mencionar la distinción entre conjuntos numerables y no numerables. Los conjuntos numerables son conjuntos infinitos que tienen la misma cantidad de elementos que el conjunto de los números naturales. Los conjuntos no numerables son conjuntos también infinitos que no tienen la misma cantidad de elementos que el conjunto de los números naturales sino más bien más elementos. Este último es el caso de los números reales, es decir, del conjunto de números comprendidos entre 0 y 1.

13. Las paradojas de Russell

Aunque la paradoja del mentiroso de por sí es muy atractiva y su estudio puede provocar las más profundas reflexiones, existen otras paradojas que también vale la pena revisar. Una de esas paradojas es la de Russell, específicamente, aquella relacionada a las clases (Russell y Whitehead, 1910). Hay que advertir que para que esta paradoja se produzca, se debe entender adecuadamente el axioma de comprensión. Este axioma afirma que, para cada propiedad dada, existe una clase de las cosas que satisfacen esa propiedad, es decir, cualquier propiedad coherente puede ser utilizada para poder establecer una clase. Por ejemplo, la propiedad «ser planta» se aplica a algún objeto siempre y cuando ese objeto pertenezca al conjunto de las plantas.

Esta paradoja trata acerca de las clases (o conjuntos) entendiendo las clases como agrupaciones de elementos. Existen dos tipos básicos de clases. Las clases que se contienen a sí mismas como uno de sus elementos, y las que no se contienen a sí mismas. Por ejemplo, la clase universal, es decir, la clase de todas las clases, se contiene a sí misma pues es una clase también y, por ende, debe estar entre uno de sus propios elementos. Ahora bien, imaginemos que, por un lado, buscamos reunir a todas las clases que se contienen a sí mismas y, por otro lado, a todas las que no se contienen a sí mismas. Pensemos en la clase de los lápices. Como sabemos, esta clase no se contiene a sí misma, pues solo contiene lápices y no clases, por ende, cumple con la condición como para estar contenida dentro de la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas. La pregunta inquietante tiene que ver con este último tipo de agrupación. La clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas,

¿se contiene a sí misma o no se contiene a sí misma? Aquí la propiedad interesante y polémica es «ser una clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas».

Si se contiene a sí misma entonces debe cumplir con la condición, a saber, debe ser una clase que no se contiene a sí misma, por ende, si se contiene a sí misma, no se contiene a sí misma. Por reducción al absurdo, se puede concluir que no se contiene a sí misma. Probemos la otra opción. Si no se contiene a sí misma, entonces no debe cumplir con la condición, a saber, debe ser una clase que se contiene a sí misma, por ende, si no se contiene a sí misma, se contiene a sí misma. Por reducción al absurdo, se puede concluir que sí se contiene a sí misma. Es decir, estamos ante una clase que se contiene y, al mismo tiempo, no se contiene a sí misma. Esta es una situación paradójica al mismo estilo que la ocurrida en la paradoja del mentiroso¹⁹.

Démosle a esta paradoja una presentación más formal, pero de tal manera que aparente una reducción al absurdo que rechaza que los conjuntos se autopertenezcan:

1. Para todo elemento z , z pertenece al conjunto determinado por aquellos elementos s que tienen la propiedad φ si y solo si z tiene la propiedad φ .

¹⁹ La paradoja de Russell se puede formular lógicamente del siguiente modo:

1. $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$	Axioma de comprensión
Consideremos que $\varphi(x)$ sea $x \notin x$	
2. $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$	Por identidad de $\varphi(x)$ asumida
Llamemos 'R' a la variable y	
3. $(\forall x)(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$	Ejemplificación existencial (2)
Reemplacemos x por R	
4. $(R \in R) \leftrightarrow (R \notin R)$	Ejemplificación universal (3)
Esta es la contradicción que descubrió Bertrand Russell (Mosterín, 1980).	

2. Para todo y , que y tenga la propiedad φ es igual a que y no pertenezca a y .
3. r es el conjunto determinado por aquellos elementos s que tienen la propiedad de no pertenecerse a sí mismos.
4. Dados a y b , que a pertenezca a b es igual a que no sea cierto que a no pertenezca a b .

Por lo tanto, no es cierto que, para todo W , W se pertenece a sí mismo.

- | | |
|--|---|
| 1. $(\forall z) [z \in \{s / \varphi(s)\} \leftrightarrow \varphi(z)]$ | |
| 2. $(\forall y) (\varphi(y) = y \notin y)$ | |
| 3. $r = \{s / s \notin s\}$ | |
| 4. $(\forall a) (\forall b) [a \in b = \sim(a \notin b)]$ | $// \therefore \sim(\forall W) (W \in W)$ |
| 5. $(\forall W) (W \in W)$ | $// \therefore \perp$ |
| 6. $\varphi(s) = s \notin s$ | 2 Ejemplificación universal |
| 7. $\varphi(z) = z \notin z$ | 2 Ejemplificación universal |
| 8. $(\forall z) [z \in \{s / s \notin s\} \leftrightarrow z \notin z]$ | 1, 6 y 7 Identidad |
| 9. $(\forall z) [(z \in r) \leftrightarrow (z \notin z)]$ | 3 y 8 Identidad |
| 10. $(r \in r) \leftrightarrow (r \notin r)$ | 9 Ejemplificación universal |
| 11. $[(r \in r) \rightarrow (r \notin r)] \wedge [(r \notin r) \rightarrow (r \in r)]$ | 10 Definición bicondicional |
| 12. $[\sim(r \in r) \vee (r \notin r)] \wedge [\sim(r \notin r) \vee (r \in r)]$ | 11 Definición condicional |
| 13. $r \in r = \sim(r \notin r)$ | 4 Ejemplificación universal |
| 14. $[\sim \sim(r \notin r) \vee (r \notin r)] \wedge [(r \in r) \vee (r \in r)]$ | 12 y 13 Identidad |
| 15. $(r \notin r) \wedge (r \in r)$ | 14 Doble negación e idempotencia |
| 16. $(\forall W) (W \in W) \rightarrow [(r \notin r) \wedge (r \in r)]$ | 5-15 Prueba condicional |
| 17. $\sim(\forall W) (W \in W)$ | 16 Reducción al absurdo |

Una estrategia para enfrentar esta paradoja fue propuesta por el mismo Russell. Sostuvo que las entidades matemáticas tienen distinto tipo. Así, si las clases son tipo 1, sus elementos son tipo 0. En ese sentido, él exigió que las clases no pudieran contener entidades de su propio tipo. Esto significaba que las clases no podrían contener a otras clases y mucho menos contenerse a sí mismas. Russell había limitado lo que una clase

podría o no podría contener. A esto se le conoce como teoría de tipos (Russell y Whitehead, 1910).

En este punto, más que resolver paradojas es interesante averiguar cómo así se les ocurren estas ideas a los filósofos y matemáticos. Si uno investiga, por ejemplo, el origen de la paradoja de las clases, descubrirá que, en principio, se le ocurrió a Russell al tratar de resolver otra paradoja, a saber, la mencionada paradoja de Cantor. Él pensaba que se trataba de una falacia muy sutil. No obstante, habiéndola analizado hasta mayo o junio de 1901, durante un tiempo prudente se convenció de que era legítima. De hecho, Russell comenzó a estudiar una lógica que recién estaba en construcción, la lógica de Frege (1973). Además, los análisis semánticos de Frege le parecieron también muy llamativos y con todas esas herramientas pudo concebir un problema que luego conoceríamos con el nombre de «paradoja de Russell». Esta paradoja sería detectada en el sistema logicista que Frege estaba diseñando para fundamentar la aritmética. Los historiadores narran que los frustrados intentos de Frege por resolver ese difícil problema encontrado por el joven Russell desencadenaron en él tan profunda depresión que ya no quiso escribir nada más al respecto.

Para popularizar su hallazgo, Russell elaboró versiones más sencillas de esta paradoja. Así, por ejemplo, muchas personas seguramente habrán oído sobre la paradoja del barbero (Russell, 2010). De acuerdo a esta paradoja, un barbero de una ciudad solo afeita a las personas que no se afeitan a sí mismas. A las que ya se afeitan, el barbero no las toca. Siendo así, la pregunta desconcertante es: ¿el barbero se afeita a sí mismo o no? Razonemos. Si se afeita, entonces él no debería

ser afeitado por el barbero, es decir, por él mismo. Por ende, si se afeita, no se afeita. Si no se afeita, él debería ser afeitado por el barbero, es decir, por él mismo. Por ende, si no se afeita, se afeita. Estamos ante un barbero que se afeita y no se afeita a sí mismo al mismo tiempo. Se trata de una versión fiel a la original paradoja, aunque más fácil de comprender. También se han difundido versiones análogas conocidas como paradoja de los catálogos y paradoja de los alcaldes.

La paradoja de los catálogos fue formulada por Gonsseth (1936) y surge a partir de la consideración de una biblioteca en la que existen dos tipos de catálogos, los catálogos que son tan grandes que parecen libros y, por ende, se incluyen a sí mismos como libros de la biblioteca y los que, por ser pequeños y no parecer libros, no se incluyen. Supongamos que quisiéramos diseñar un catálogo «C» de todos los catálogos que no se incluyen a sí mismos como libros de la biblioteca. ¿Debe estar incluido este catálogo «C» dentro de sí mismo o no? Si «C» se incluye a sí mismo, entonces «C» es uno de los catálogos que no se incluye a sí mismo y si «C» no se incluye a sí mismo, entonces debe estar incluido dentro del catálogo de todos los catálogos que no se incluyen a sí mismos, es decir, «C» debe estar incluido dentro de sí mismo.

La paradoja de los alcaldes surge cuando consideramos que hay dos tipos de alcaldes, aquellos que viven en la ciudad de la que son alcaldes y aquellos que no viven dentro de la ciudad de la que son alcaldes. Ahora bien, imaginemos que se decreta que todos los alcaldes que no vivan en la ciudad en la que gobiernan vivan ahora en una ciudad «Z». Pero la ciudad «Z» se hace tan grande que ahora también necesita un alcalde. ¿Dónde debe vivir dicho alcalde de la ciudad «Z»? Si vive

dentro de «Z», entonces es un alcalde que vive en su propia ciudad y, por ende, debe vivir fuera de «Z». Y si no vive dentro de «Z», entonces dado que es un alcalde que no vive en la ciudad que gobierna, cumple con la condición como para vivir dentro de la ciudad «Z». Este es un problema paradójico (Allen, 1993).

14. La paradoja de Grelling

Esta paradoja se relaciona con los conceptos de heterológico y autológico. Por un lado, se considera que una expresión es heterológica cuando no se describe a sí misma, esto es, cuando se puede afirmar que una expresión «g» no es g, se dice que g es heterológica. Ejemplos: «algo escrito en inglés» no es algo escrito en inglés, «una expresión compuesta de dos palabras» no es una expresión compuesta de dos palabras y «monosilábica» no es monosilábica. Estas tres expresiones son heterológicas. Por otro lado, se considera que una expresión es autológica cuando se describe a sí misma, esto es, cuando se puede afirmar que una expresión «g» es g, se dice que g es autológica. Ejemplos: «una expresión compuesta de seis palabras» es una expresión compuesta de seis palabras, «esdrújula» es esdrújula y «una expresión escrita en color negro» es una expresión escrita en color negro. Estas tres expresiones son autológicas.

Ahora bien, existe un problema que debemos enfrentar al entender la naturaleza de los conceptos heterológico y autológico. ¿Qué tipo de expresión es «heterológica»? ¿Es autológica o heterológica? Este asunto es un desafío. Podemos afirmar que la expresión «heterológica» es heterológica. Si esto es así, entonces se podría decir que «heterológica»

se describe a sí misma y esto la convertiría en una expresión autológica. Entonces, aceptemos que es autológica. Pero si afirmamos que la expresión «heterológica» es autológica, se podría decir que «heterológica» no se describe a sí misma y esto la convertiría en una expresión heterológica. Estamos ante una paradoja muy semejante a la de Russell y también a la del mentiroso (Grelling y Nelson, 1907).

15. La paradoja de Berry

Esta paradoja fue ideada por Berry, bibliotecario de la *Bodleian Library* de Oxford. Russell solo se encargó de difundirla. (Russell, 1906, 1910). Las frases pueden ser limitadas de diversas maneras. Una de esas maneras es estipulando un número máximo de palabras. Por ejemplo, podemos declarar como aceptables solo frases con doce palabras como máximo. Incluso podemos añadir que esas frases deben ser usadas solamente para describir números naturales. Por ejemplo, este tipo de frases serían «dos elevado a la décima potencia», «treinta mil millones» y «el menor número múltiplo de cinco después del número diez».

Pensemos en un acertijo simple. ¿Cuál es el menor número natural que no puede describirse con menos de tres palabras? Lo que esta pregunta busca es detectar al menor número que pueda describirse con tres palabras como mínimo. Algunos afirman que la respuesta es «treinta y uno» y otros, que es «mil ciento uno».

Ahora bien, con esta introducción ya estamos en condiciones para entender la paradoja de Berry. Esta se plantea mediante la siguiente pregunta. ¿Cuál es el menor número natural que no se puede describir con menos de quince palabras? Como sabemos, lo que se busca es

detectar al menor número natural que pueda describirse con catorce palabras como mínimo. Y, aunque podemos proponer muchas respuestas, el tema controversial tiene que ver con el análisis de la frase «el menor número natural que no se puede describir con menos de quince palabras». Sucede que esa frase tiene catorce palabras y estaría en contradicción con lo que se pide, a saber, una frase con quince palabras como mínimo para describir tal número. Así, se puede concluir que tal número, que denominaremos B, no se puede describir con menos de quince palabras (porque es lo que ordena la frase) y, al mismo tiempo, se puede describir con menos de quince palabras (porque la propia frase tiene catorce palabras).

16. La paradoja de Curry

Existe una paradoja que combina rasgos de las dos paradojas más fundamentales de la lógica del siglo XX. Se trata de la paradoja de Curry (1942). Esta paradoja puede formularse de modo semejante a la paradoja de Russell y a la del mentiroso y ese es uno de sus rasgos más notables. Explicaremos este último caso del siguiente modo. Lo único que alguien dice es lo siguiente: «Si esto que estoy diciendo es verdadero entonces el fin del mundo será el año 2030». Mediante varias aplicaciones de reglas lógicas elementales podemos probar efectivamente que «el fin del mundo será el año 2030»²⁰.

²⁰ Esta es la demostración de la paradoja de Curry. Sea (C) la condicional autorreferencial: «Si C es verdad entonces el fin del mundo será el año 2030». Supongamos que C es verdadera:

(1) Es verdad que C

De (1) se deduce, por definición tarskiana de la verdad

(2) C

De (2), por la definición de (C), se obtiene

Esta paradoja señala que cualquier expresión A puede ser demostrada siempre y cuando encaje en el consecuente de una sentencia condicional autorreferida cuyo antecedente aluda a toda la condicional entera. Dicha sentencia tendría esta estructura: «Si esta condicional es verdad entonces A».

Normalmente, se cree que una contradicción es la que genera el problema de que todo se demuestre. Esto último se conoce como principio de explosión y alude a la idea de que cuando un sistema lógico alberga una contradicción, todas las proposiciones se vuelven demostrables²¹. La novedad que tiene la paradoja de Curry es que no contiene ni negaciones y ni siquiera una contradicción y, sin embargo, genera este problema que se conoce como trivialidad deductiva. (Barrero y Carnielli, 2005). Así, con esta paradoja se establece que tampoco hace falta la contradicción para poder realizar demostraciones absurdas.

Esta situación resulta siendo problemática porque no debería ser posible probar cualquier expresión dada solo porque encaje en una forma

(3) Si es verdad que C, entonces el fin del mundo será el año 2030.

De (1) y (3), por *Modus Ponens*, se sigue que

(4) El fin del mundo será el año 2030

Dado que (4) se sigue de suponer (1), podemos aplicar la prueba condicional para conectar (4) con (1) y así afirmar libre de presupuestos que

(5) Si es verdad que C, entonces el fin del mundo será el año 2030.

De (5), por la definición de (C), se obtiene

(6) C

De (6) se deduce, por definición tarskiana de la verdad

(7) Es verdad que C

Finalmente, de (5) y (7), aplicando *Modus Ponens*, se sigue

(8) El fin del mundo será el año 2030.

De este modo, mediante la paradoja de Curry se puede demostrar cualquier cosa, incluso contradicciones.

²¹ Se conoce como principio de explosión al siguiente esquema: $\alpha, \sim\alpha \vdash \beta$. Lo anterior se puede leer de este modo: «A partir de una contradicción tipo $(\alpha \wedge \sim\alpha)$ se puede demostrar cualquier expresión tipo β ».

predeterminada de antemano. No todo debe ser demostrable. Si fuera posible demostrar todo lo que se nos ocurra (incluso las ideas falsas o sin sentido), entonces la idea de demostración entendida como criterio para fundamentar la verdad de tal o cual sentencia estaría en duda y, además, dejaría de ser relevante. Sin embargo, es posible interpretar esta paradoja de Curry usando las herramientas de la lógica no formal, específicamente la pragmática, para enfocarla como una expresión retórica menos problemática (Mora, 2020a). Esto también lo detallaremos más adelante.

17. ¿Para qué hemos conocido estas paradojas?

Todas estas paradojas fueron asumidas como desafíos mentales por la intelectualidad, tanto de la antigüedad como de estos últimos tiempos. Al intentar entender y resolver estos desafíos, los seres humanos desarrollan su pensamiento crítico. A veces se ven en la necesidad de conocer más a fondo al lenguaje, a la lógica, a las ciencias o a las matemáticas. Pero cualquiera que comprenda el problema que representan estas paradojas no puede menos que sorprenderse. Cuando uno contempla la maravilla del infinito y sus atractivos misterios, debe sentirse privilegiado de poseer una mente que es capaz de entender el asunto que está en juego.

Unos podrían asumir que la vida está llena de paradojas, y que frente a ellas no podemos hacer nada salvo intentar que eso no convierta nuestras vidas y nuestra sociedad en un infierno. Otros tal vez comprendan que nuestra mente, el lenguaje y la ciencia deben tener alguna especie de estructura básica y fundamental que posibilita la formulación de estos desafíos mentales. Quizás piensen que esa

estructura existe por sí misma, que tiene su propio orden y que no depende de lo que quieran o deseen los seres humanos. Esto último es una especulación metafísica de alto calibre y podría ocurrírsele a alguien.

Lo cierto es que estas paradojas no pueden sernos indiferentes. No se trata solo de cuestiones anecdóticas, ya que existe una larga lista de estos casos. Más adelante, analizaremos el aspecto educativo de estos desafíos mentales para mostrar que es posible pasar de la pura abstracción, al plano concreto y práctico de las ideas.

CUESTIONARIO # 1

1. ¿Quién es conocido como el padre de la dialéctica?

- a) Sócrates
- b) Heráclito
- c) Aristóteles

2. Según Heráclito, ¿qué frase describe mejor su pensamiento?

- a) Todo permanece estático.
- b) Todo fluye.
- c) La unidad es lo ilusorio.

3. ¿Qué principio lógico refuta a Heráclito?

- a) Principio de no contradicción.
- b) Principio de razón suficiente.
- c) Principio de la causalidad.

4. ¿Qué paradoja surge de la idea de "A es verdad si y solo si A es falso"?

- a) Paradoja del mentiroso.
- b) Paradoja de Russell.
- c) Paradoja de Epiménides.

5. ¿Qué autor clasificó a las paradojas en antinomias, paradojas falsídicas y paradojas verídicas?

- a) Quine.
- b) Clark.
- c) Ramsey.

6. ¿Qué tipo de paradoja representa el argumento que demuestra que " $2 = 1$ "?

- a) Verídica.
- b) Falsídica.
- c) Antinomia.

7. ¿Cuál es el menor número natural que no se puede describir con menos de quince palabras? La pregunta anterior plantea la paradoja

- a) de los caníbales.
- b) de Berry.
- c) de Jourdain.

8. ¿Qué lógica propone estudiar casos que no cumplen el principio del tercio excluso?

- a) Lógica clásica.
- b) Lógica paracompleta.
- c) Lógica deóntica.

9. ¿Qué paradoja sugiere la confusión entre autológico y heterológico?

- a) la de Grelling.
- b) la de Cantor.
- c) la de Russell.

10. ¿Cuál es la paradoja que plantea Cantor?

- a) La del mentiroso.
- b) La del conjunto universal.
- c) La de los abogados.

Solucionario: 1b, 2b, 3a, 4a, 5a, 6b, 7b, 8b, 9a, 10b



CAPÍTULO 2

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y PARADOJA DE RUSSELL

Resumen: En este apartado explicaremos la problemática que fue provocada por la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell en el terreno de los fundamentos de la matemática concierne. Esta paradoja no es, como algunos pueden suponer, un simple juego de palabras, sino que tiene un importante valor. Su sola formulación amenazaba la consistencia de la teoría de conjuntos, la cual se configuraba como la base de toda la matemática. Varios intentos de solucionar o interpretar esta paradoja se han dado. A continuación, expondremos las propuestas del logicismo, axiomatismo, intuicionismo, formalismo, platonismo y dialeteismo

1. El problema de los fundamentos de la matemática

La investigación en el campo de los fundamentos de la matemática inicia a causa del tremendo impacto que produce el descubrimiento de las paradojas, o antinomias, de la teoría de conjuntos. En 1897, época en que Burali-Forti publica la primera paradoja (acerca de los ordinales) y en que el propio Cantor había descubierto ya varias paradojas, pero no las había publicado, la teoría de conjuntos era considerada como el fundamento de toda la matemática clásica. Las paradojas mostraban que algo extraño acontecía en el nivel más alto del pensamiento racional y que, mientras no se supiera qué era lo que pasaba, la ciencia lógico-matemática y toda la ciencia en general, no podría establecerse sobre bases seguras. Así, el surgimiento de las paradojas se constituye como el gran incentivo que generó la moderna investigación en la que se ha ido desarrollando los grandes movimientos filosófico-matemáticos. (Miró Quesada, 1980, pp. XIX-XX)

Las investigaciones que se realizan en torno a los fundamentos de la matemática se encuentran dentro de la filosofía de la matemática. Esta es una disciplina que trata de comprender y explicar los requisitos, el objeto, el método y la naturaleza de las matemáticas. En esta se intentan responder, entre otras, las siguientes preguntas:

- ¿Cómo sabemos que nuestras teorías matemáticas son verdaderas?
- ¿Sobre qué son las matemáticas? En otras palabras, si un enunciado matemático es verdadero, ¿qué lo hace verdadero? ¿En virtud de qué es verdadero?

-¿Las verdades matemáticas son verdaderas por necesidad? Y, si lo son, ¿cuál es la fuente de esta necesidad?

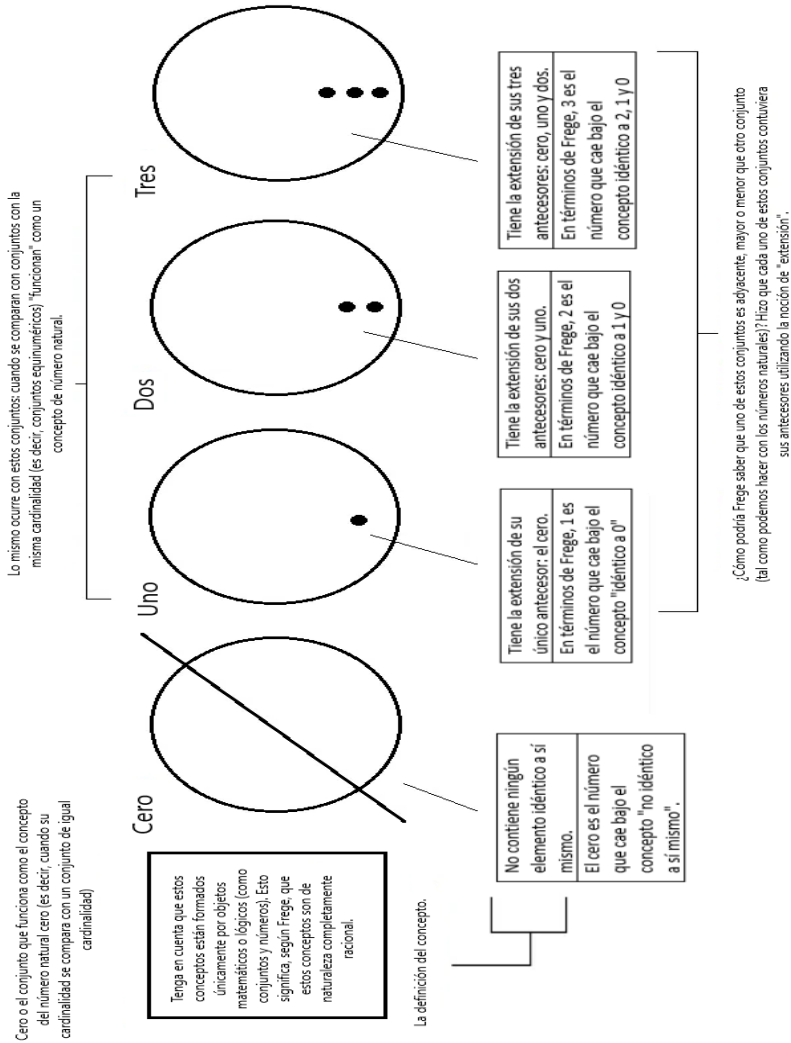
Ahora bien, es un hecho que la filosofía de la matemática logró ocupar el centro de los debates epistemológicos a inicios del siglo XX cuando surgió la mencionada “crisis de la teoría de conjuntos” provocada por la aparición de las paradojas en dicho campo. Sin embargo, es solo a partir del pronunciamiento de Russell que dichas paradojas comienzan a cobrar valor. Las paradojas ya existían desde antes que se comenzara a discutir sobre los fundamentos de la matemática. Pero, es Russell quien le otorga el valor adecuado a estas paradojas, llamando la atención así de propios y extraños. Existen muchas propuestas para anular, arreglar, amortiguar o reducir el impacto desestabilizador provocado: logicismo, axiomatismo, formalismo, etc. En lo que sigue, revisaremos todas y cada una de estas.

2. Logicismo

Esta es la primera postura filosófica sobre los fundamentos de la matemática. Si bien Frege inició el programa logicista, este fue continuado por Bertrand Russell en la obra *Principia Mathematica* que escribió asociado con Alfred North Whitehead. De acuerdo a Mosterín (2000, pp. 151-152), la tesis logicista considera que la matemática es totalmente reducible a la lógica en el siguiente sentido:

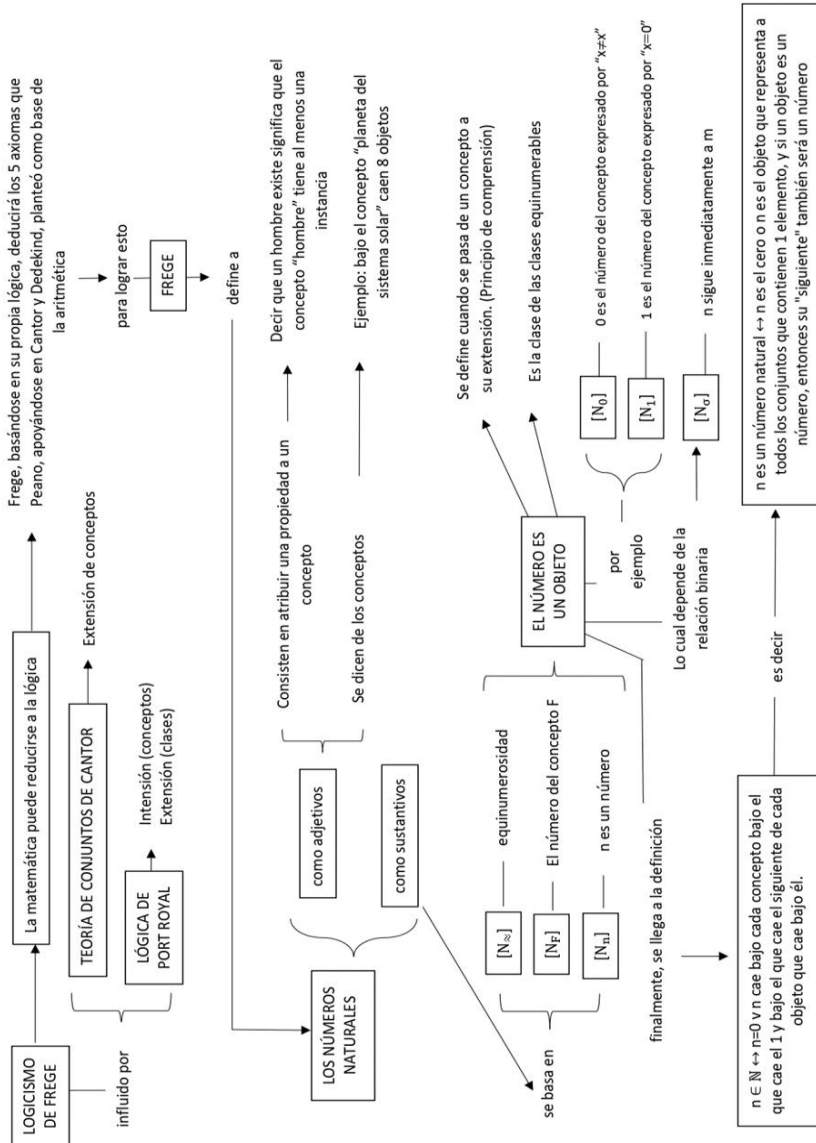
- 1) Todos los conceptos de la matemática pueden definirse a partir de conceptos puramente lógicos.
- 2) Todos los teoremas matemáticos pueden deducirse a partir de principios lógicos.

Figura 3
Los números naturales de Frege



Fuente: Barbalho, 2021

Figura 4
Logicismo de Frege



Fuente: Elaboración propia

2. 1. Teoría de los tipos lógicos

Esta teoría, propuesta por Russell para evitar la aparición de paradojas, fue elaborada en 1908 e incorporada a los *Principia Mathematica* (1910-13). En el trabajo de Ferrater Mora y Leblanc (1992, pp. 168-175) se presentan dos versiones: la intensional -fundada en el dualismo entre propiedades monádicas y clases- y la versión extensional -donde se abandonará tal dualismo y se acogerán solamente clases. Pero, hay que apuntar que ambas son distintas formulaciones de la teoría simple de los tipos. Enseguida, en base a Copi (2001, pp. 180-181 y 355-365) presentaremos esta.

2. 1. 1. Teoría simple de los tipos

Según Russell, las entidades se dividen en una jerarquía de tipos lógicos diferentes, el más bajo de los cuales consiste en todos los individuos, el siguiente en todos los atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de atributos de individuos, y así sucesivamente. Se debe, además, considerar aparte de esta división de todas las entidades en tipos lógicos diferentes, la restricción de que cualquier atributo que pueda significativamente predicarse de una entidad de un tipo lógico no puede significativamente predicarse de cualquier entidad de cualquier otro tipo lógico. Por ejemplo, una cosa individual puede ser de color naranja, pero claramente no tiene sentido decir de algún atributo que es de color naranja. Y un atributo puede tener muchas ejemplificaciones, es

decir, objetos a los cuales se les puede aplicar, pero no tiene sentido ni afirmar ni negar que una cosa individual tenga muchas ejemplificaciones.

Expresaremos en términos formales la teoría simple de los tipos. Usando letras minúsculas para designar individuos y mayúsculas para denotar atributos, podemos representar esta jerarquía como sigue, donde el subíndice que se pone a una función indica su nivel correcto en la jerarquía:

.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
tipo 3:	F_3	G_3	H_3	.	.	.
tipo 2:	F_2	G_2	H_2	.	.	.
tipo 1:	F_1	G_1	H_1	.	.	.
tipo 0:	a	b	c	.	.	.

Solo una función de tipo 1 puede predicarse significativamente de un individuo, y en general, una función de tipo i puede significativamente predicarse de una función de tipo j si y solo si $i=j+1$.

Lo atractivo de la teoría simple de los tipos es el hecho de que permite evitar contradicciones como la del pretendido atributo “impredicable”. De acuerdo con esta teoría, el tipo de un atributo debe ser más alto que el tipo de cualquier entidad de la cual se pueda significativamente predicar. Así pues, no tiene sentido ni afirmar ni negar de ningún atributo que pertenezca a sí mismo; expresiones como “ $\text{Imp}(\text{Imp})$ ” y “ $\sim\text{Imp}(\text{Imp})$ ” deben rechazarse por carentes de significado. En consecuencia, no es posible definir el atributo “impredicable” y la contradicción desaparece.

Desde otro enfoque, también es posible resolver la paradoja de las clases. Como hemos podido notar, todas las entidades se disponen de acuerdo a tipos jerárquicos, lo que determina que, mientras las entidades del mismo tipo pueden juntarse en una clase, las entidades de tipos diferentes no lo pueden hacer. Por ejemplo, hay una clase de objetos rojos. Pero, no hay una clase que junta a los objetos rojos con la clase de los objetos rojos. La clase de los objetos rojos pertenece a un tipo superior que el tipo de los objetos rojos en forma aislada. En la medida que ascendemos en las jerarquías, esto se repite. Hay una clase cuyos miembros son la clase de los objetos rojos, otra que es la clase de los objetos verdes, otra es la clase de los objetos azules y otra la clase de los objetos amarillos. Pero, no hay ninguna clase que consista en el conjunto de todas ellas juntas con la clase de las clases de objetos coloreados. Y así sucesivamente. De este modo, se elimina cualquier intento de construir una clase cuyos miembros sean de diferente tipo. No se deben introducir clases con miembros de distinto nivel lógico, ya que el resultado no va a ser una expresión bien fundada en nuestra lógica. Por ende, la expresión “clase de las clases que no son miembros de ellas mismas” no es una expresión permitida. (Scruton, 2003, p. 392)²²

²² Como el propio Russell dice: “(...) toda esa cuestión de si una clase es o no miembro de sí misma carece de sentido; esto es, que ninguna clase es, ni deja de ser, miembro de sí misma, y que ni siquiera esto último tiene visos de ser cierto, ya que, cuando decimos tal cosa, se trata simplemente de palabras desprovistas de todo significado. (...)” (Russell, 1986, p. 230)

3. Axiomatismo ²³

Esta escuela (también conocida como “conjuntismo”) no intenta desentrañar la esencia del conocimiento matemático. Más bien, propone limitar los conjuntos mediante axiomas que imposibiliten la aparición de paradojas. Por ejemplo, reemplaza el axioma de comprensión²⁴ por el axioma de la separación²⁵ que sostiene que para que una propiedad pueda determinar un conjunto es necesario que se aplique a elementos de otro conjunto preexistente cuya existencia esté asegurada de antemano. Así, se logra frenar a la aparición de paradojas y, a su vez, admitiendo simultáneamente todos los axiomas, se pueden derivar los teoremas característicos de la teoría clásica de conjuntos.

Zermelo creía que las paradojas de la teoría de conjuntos surgían debido a que Cantor no había restringido el concepto de conjunto. Zermelo esperaba, por consiguiente, que unos axiomas claros y explícitos clarificarían lo que se entendía por conjunto y las propiedades que los conjuntos debían tener. Él buscaba en particular limitar el tamaño de los conjuntos.

²³ Si bien el axiomatismo no constituye una escuela de pensamiento filosófico sobre los fundamentos de la matemática sino que más bien se perfila como una estrategia para resolver el tema de las paradojas, consideramos que es justo colocarla al lado de las demás posturas siguiendo ciertos cánones establecidos. Así, también Miró Quesada lo hace en *Apuntes para una teoría de la razón* (1963, pp. 52-53) y también Morris Kline en *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*. (2000, pp. 295-311)

²⁴ El axioma de comprensión sostiene que para cada condición, existe el conjunto de las cosas que satisfacen esa condición. Formalmente, $(\exists B) (\forall x) (x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$. Ejemplo: si algún objeto x pertenece al conjunto de los gatos, se puede decir que “ser gato” se aplica al objeto x .

²⁵ El axioma de separación sostiene que para cualquier conjunto ya dado A y cualquier condición $\varphi(x)$, existe el conjunto de los elementos de A que satisfacen esa condición. Formalmente, $(\forall A) (\exists B) (\forall x) [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$. Ejemplo: si algún objeto x pertenece al conjunto de los gatos, se puede decir que “ser gato” se aplica al objeto x y que el objeto x pertenece a un conjunto ya existente, el cual podría ser el conjunto de los mamíferos.

Zermelo sostuvo que la paradoja solo se produce con algunos predicados, como los que escogió Russell. Por ende, hay que concluir que no hay un conjunto que corresponda al conjunto de los conjuntos que no son miembros de ellos mismos. Algunos predicados determinan conjuntos, otros no. Es decir, hay un conjunto para cada predicado legítimo, pero no para cada predicado. A partir de la teoría de conjuntos, definida en esta forma, se construyen nuestras matemáticas.²⁶

Con la axiomática zermeliana se logra hacer frente a la paradoja de Russell. La paradoja de Russell surgía, afirma Mosterín (1980, pp. 25-26), de la aceptación de los principios intuitivos de que (a) para cada condición existe el conjunto de las cosas que satisfacen esa condición y de que (b) todo conjunto es una cosa que puede ser elemento de otros conjuntos. Podemos formular (a) como afirmando que para cualquier condición $\varphi(x)$:

1. $(\exists B) (\forall x) (x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$ Axioma de comprensión

Eliendo como condición $\varphi(x)$ la de no ser elemento de sí mismo, $x \notin x$, obtenemos

2. $(\exists B) (\forall x) (x \in B \leftrightarrow x \notin x)$ 1 y * Identidad²⁷

Llamando 'Z' a tal B resulta que

3. $(\forall x) (x \in Z \leftrightarrow x \notin x)$ 2 Ejemplificación existencial

Y sustituyendo x por Z se obtiene que

4. $(Z \in Z \leftrightarrow Z \notin Z)$ 3 Ejemplificación universal

²⁶ Así, podemos afirmar que si se aceptan los axiomas de la teoría de conjuntos, se pueden construir todas las matemáticas sobre ellos. Por lo cual, la lógica al estar subordinada a los axiomas de las matemáticas, no controlaría lo que son o lo que hacen las matemáticas. La lógica es la gramática del lenguaje que usamos, un lenguaje que tuvo que existir antes de que se pudiera construir la gramática. Este lenguaje viene dado por los axiomas de Zermelo.

²⁷ * Corresponde a la expresión: $\varphi(x) = x \notin x$.

Lo que constituye la contradicción hallada por Russell.

La estrategia de Zermelo consiste en evitar que puedan aparecer en la teoría conjuntos “demasiado grandes” que son los que pueden dar lugar a contradicciones. Por eso, limita el esquema de formación de conjuntos a los elementos de algún conjunto ya dado B, por tanto, inofensivo. Así, pues, el esquema axiomático de formación de conjuntos (es decir, el axioma de separación) dice ahora que para cualquier conjunto ya dado A y cualquier condición $\varphi(x)$, existe el conjunto de los elementos de A que satisfacen esa condición.

1. $(\forall A) (\exists B) (\forall x) [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$ Axioma de separación
2. $(\exists B) (\forall x) [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$ 1 Ejemplificación universal

A partir de esto, la paradoja de Russell ya no se puede obtener, pues por la misma inferencia de antes lo que ahora resulta es

3. $(\exists B) (\forall x) [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin x)]$ 2 y * Identidad
4. $(\forall x) [x \in Z \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin x)]$ 3 Ejemplificación existencial
5. $Z \in Z \leftrightarrow (Z \in A \wedge Z \notin Z)$ 4 Ejemplificación universal

Lo cual ya no es ninguna contradicción, pues lo que ahora se sigue es

6. $Z \notin A \wedge Z \notin Z$ 5 Definición del bicondicional, Absorción

es decir, que el conjunto de los elementos de A que no son elementos de sí mismos (a saber, Z) no es elemento de A ni de sí mismo.

Ahora, debemos considerar la cuestión de si la axiomatización de Zermelo se deshace de todas las paradojas de la teoría de conjuntos. Pero, para lograr dar respuesta definitiva a esta cuestión tendríamos que tener una prueba de consistencia lo que, por el segundo teorema de Gödel²⁸, no

²⁸ Presentaremos los teoremas gödelianos en la sección dedicada al ‘Platonismo’ de Gödel.

puede hacerse. Por lo tanto, siguiendo a Beth, tendremos que conformarnos con poner de manifiesto que son eliminados los argumentos que en la versión original de Cantor de la teoría de conjuntos daban lugar a paradojas, gracias a las restricciones implícitas en axiomatizaciones como la de Zermelo. Es decir, este sistema no logra ofrecer una garantía indubitable contra el hallazgo de ‘nuevas’ paradojas. Los conjuntistas piensan que no se pueden obtener paradojas porque se ha construido una jerarquía de conjuntos que evitaba la ambigüedad. Pero, como se ha afirmado, la consistencia de la teoría de conjuntos no ha sido demostrada ni podrá serlo. Según Poincaré: “Hemos puesto una cerca alrededor del rebaño para protegerlo de los lobos, pero no sabemos si dentro de la cerca han quedado encerrados algunos lobos”. (Beth, 1975, pp. 30-31)

4. Intuicionismo

Esta escuela expone una versión del constructivismo²⁹ y tiene como representantes a L. E. J. Brouwer y A. Heyting. Este grupo de pensadores imputa la existencia de contradicciones al manejo ciego del método lógico; este solo nos ofrece garantía donde lo hemos probado largamente, pero cuando nos salimos de esos dominios y entramos al dominio de lo transfinito la aplicación de este instrumento nos hace caer

²⁹ El constructivismo en la fundamentación de las matemáticas surge a principios del siglo XX a raíz de la llamada crisis de la teoría de conjuntos. Sus variantes concuerdan en cuanto a la exigencia de que las demostraciones matemáticas sean constructivas, pero disienten en cuanto a la amplitud que conceden a este concepto. Así, el intuicionismo de Brouwer adopta una idea de construcción muy peculiar que excluye ciertos teoremas centrales del análisis clásico (por ejemplo, “Toda función real acotada por arriba tiene una cota superior mínima”), pero permite demostrar otros que para este son falsos (por ejemplo, “Toda función real definida en el intervalo cerrado $[0,1]$ es uniformemente continua”).

en error. Por ello, la intuición es la que debe juzgar, en última instancia, la validez misma de las reglas lógicas; de manera que si siempre le da uno la prioridad debida, ya no nos exponremos a antinomias (Blanché, 1965, p. 74). Es decir, para deshacerse de las paradojas, el intuicionismo sostiene que basta una vuelta al punto natural de partida del pensamiento matemático y una adecuada adaptación del lenguaje matemático respecto del pensamiento matemático (Beth, 1975, p. 28).³⁰ Para un intuicionista una construcción es una entidad mental y en ningún caso se pueden identificar con entidades lingüísticas como lo sugiere la lógica clásica. El conocimiento matemático se basa en la aprehensión -que antecede cualquier lenguaje o lógica- de algunos conceptos matemáticos básicos dados por intuición.

Siguiendo a Scruton (2003, p. 387), podemos afirmar que el intuicionismo considera que la única concepción de la verdad matemática es la idea de prueba o demostración. Las teorías matemáticas son nuestros constructos intelectuales y, por lo tanto, nunca nos va a conducir a objetos que existan en forma independiente de nuestra actividad. Todo lo que hay es la prueba. Asimismo, los números no existen hasta que se los “construye”, a través de operaciones que los generan en un número finito de pasos. Todo objeto matemático es considerado producto de la mente humana, y, por ende, la existencia de

³⁰ Curiosamente, hay algo intuitivamente atractivo en la teoría de los tipos ya expuesta, pues se hace eco de la idea constructivista de que las entidades abstractas existen porque nosotros las construimos; por lo tanto, para no hacer algo sin sentido, se debe tener cuidado de cómo las construimos. Las clases con miembros de distinto nivel lógico sufren del mismo defecto que las oraciones “La existencia existe” o “El concepto de caballo es un caballo”: estos aplican subrepticamente conceptos a sí mismos, más que a las cosas que dependen de ellos. (Scruton, 2003, p. 393)

un objeto es equivalente a la posibilidad de su construcción. No hay números allá afuera, a la espera de ser descubiertos (como Platón afirmaba); todos los números que existen están contenidos en los libros y artículos de los matemáticos que ofrecen una prueba constructiva. Decir que los números existen es afirmar que hay pruebas válidas implicando numerales. Esto, evidentemente, contrasta con el enfoque clásico, que formula que la existencia de un objeto puede ser demostrada refutando su falsedad. Para los intuicionistas esto no es válido, pues la refutación de la falsedad de un objeto matemático no significa que es posible hallar una prueba constructiva de su existencia. En otras palabras, tal y como afirma Miró Quesada:

(...) La concepción intuicionista [de la verdad] es un tipo de concepción epistémica. La concepción epistémica de la verdad consiste en afirmar que *la verdad no puede separarse de su conocimiento* (...). Para un intuicionista una proposición matemática, digamos, aritmética, $F(m)$ *solo es verdadera si se ha construido*. Construir una proposición es, precisamente, disponer de un método que permita, en un número finito de pasos, fundados en evidencias, *saber que m tiene la propiedad F* . Si se construye $F(m)$, *se sabe* que $F(m)$ es verdadera (...). Para la concepción epistémica de la verdad, la construcción de $F(m)$ es condición suficiente y necesaria de la verdad de $F(m)$. (...) (Miró Quesada, 1982, pp. 122-123)

Así, esta posición filosófica se basa en la intuición primordial de los números naturales, donde cada uno de esos números puede, a partir del 1, ser “construido” agregando 1 al anterior. Así, el resto de la

matemática puede (y debe) ser construida de forma explícita y rigurosa, lo que requiere un método claro y preciso. Solo entidades cuya existencia (positiva o negativa) haya sido demostrada de tal manera, o por medio de tal método, tienen validez matemática. Se podría decir que, desde el punto de vista intuicionista, las verdades matemáticas no se descubren, se crean, se construyen.

Ahora bien, una proposición matemática es verdadera solo si hay una prueba de ella; en forma similar, es falsa solo si hay prueba de su negación. Pero, ¿qué ocurre si no hay pruebas para ninguna de las dos alternativas? Esta sería indecidible y tendríamos que romper con el principio del tercero excluido (PTE). Como ejemplo, tenemos la conjetura fuerte de Goldbach:

-Todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos.³¹

Al respecto de este, no se puede probar ni su afirmación ni su negación, es decir, no tenemos una prueba de su verdad o falsedad. Otro ejemplo, sería el siguiente propuesto por Palau:

Supóngase que se quiere probar la siguiente afirmación: *Sea p cualquier número primo y N cualquier número natural; entonces p divide a N^2 , si y solo si p divide a N .* Si se acepta el *Principio del Tercero Excluido*, debería poder probarse que para cualquier valor

³¹ Algunos, más informados, pensarán que esta conjetura ya ha sido resuelta, pero hay que recordar que la que ha encontrado solución es la conjetura débil de Goldbach, la misma que afirma lo siguiente: “Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos”. Precisamente, el matemático peruano Harald Helfgott ha publicado dos trabajos en los años 2012 y 2013 mediante los cuales se ha podido demostrar incondicionalmente la conjetura débil de Goldbach. De este modo, la conjetura queda demostrada después de 271 años. Así, dicha conjetura pasa a ser un teorema, es decir, un enunciado que es deducible a partir de los axiomas correspondientes, empleando reglas de inferencia.

de p y N , la afirmación en cuestión puede decidirse bajo cualquier de las dos siguientes suposiciones: (i) p divide a N y (ii) p no divide a N . Pero resulta que en este caso no se puede probar el problema bajo ninguna de las dos suposiciones. Luego, pensar el problema tomando el PTE como válido induce a pensar que el problema tiene solución, cuando en realidad no la tiene y, por ello, el PTE no está justificadamente aplicado. (Palau, 2002, pp. 82-83)³²

Lo reafirmamos: para los intuicionistas un ente cualquiera es válido si y solo si puede ser construido por medio de un procedimiento especificado y con un número finito de pasos o operaciones. Pero, ¿cuál procedimiento específico y finito puede generar el infinito? Cualquier procedimiento que escojamos solo nos dará algún número concreto. Consecuentemente, el infinito intuicionista es solo potencial, a diferencia del infinito actual (de cuño cantoriano) que lo concibe como una totalidad completa y acabada.

De esta manera, el intuicionismo elimina la vertiginosa metafísica a la que pareciera someternos el platonismo. A la vez, también proporciona una explicación inteligible sobre la naturaleza *a priori* de las

³² Del texto de Piñero (2012, p. 39) podemos poner otro ejemplo. Sea $\pi = 3,14159265\dots$. De este número sabemos que es un número irracional de infinitas cifras decimales no periódicas. Ahora, definamos el número p de la siguiente forma:

a) Si aparece entre los dígitos de π alguna vez una secuencia de exactamente quince ceros seguidos, entonces p es el dígito (distinto de cero) que se sigue inmediatamente después de la primera aparición de esos quince ceros.

b) Si nunca aparecen exactamente quince ceros seguidos, entonces p vale 0 (cero)

Es preciso decir que hasta la fecha no se ha detectado una seguidilla de quince ceros entre los dígitos calculados de π .

Con respecto a esto, ¿existe p ?

Para los intuicionistas, no existe p , pues la definición indicada no es constructiva. Además, dado que p no existe ni es un número, entonces no tiene sentido la afirmación " $p+1=9$ ", por poner un caso.

matemáticas tal y como la dio Kant. Es decir, las proposiciones matemáticas se conocen *a priori* porque nosotros mismos somos sus autores. Sabemos tanto de números, y en forma tan infalible, porque las verdades respecto a ellos se crean por las pruebas que llevan a ellas.

5. Formalismo

El formalismo fue planteado por David Hilbert. Esta escuela nació a raíz de los éxitos obtenidos por su axiomatización de la geometría en 1899 en su obra *Fundamentos de la Geometría*. Ahora bien, es importante señalar que la corriente formalista se ha constituido por oposición al intuicionismo, para poner de relieve el aspecto hipotético, formal y convencional de la matemática. Una consecuencia de esto ha sido el surgimiento de un enfoque que prácticamente desvanece la distinción entre axioma y postulado, lo que conduce, entre otras cosas, a prescindir del enunciado “es verdadero” como predicado de un axioma, y a restituir un cierto grado de libertad al momento de considerar de qué axiomas se parte, en la medida en que estos tan pronto como pueden ser admitidos, pueden ser, del mismo modo, rechazados o substituidos por otros. Asimismo, vuelve a reclamar la validez del principio del tercio excluso. A su juicio, quitarles a los matemáticos el principio del tercio excluso es como prohibir el telescopio a los astrónomos y el uso de sus puños a los boxeadores. Por ende, negar los teoremas de existencia que utilizan el principio del tercio excluso es tanto como renunciar de golpe a la ciencia de las matemáticas.

El formalismo de Hilbert consideraba que toda la matemática podía ser axiomatizada. Precisamente, el programa de Hilbert era el

proyecto de axiomatizar todas las teorías de la matemática en un lenguaje completamente formalizado, y demostrar que los sistemas resultantes eran consistentes. Las pruebas de consistencia debían ser absolutas y susceptibles de ser verificadas concluyentemente en un número finito de pasos (es decir, ser finitistas). El ideal de Hilbert consistía en obtener para cada rama de la matemática un sistema axiomático formalizado que fuera a la vez consistente, completo e independiente (esto es, que sus axiomas no se deduzcan de otros). (Cassini, 2006, p. 52)

El denominado ‘programa hilbertiano’ consistía en unir la formalización axiomática con el rigor constructivo de la siguiente manera: en un primer momento, la matemática clásica es formalizada y axiomatizada; en un segundo momento, se procura obtener sistemas consistentes recurriendo solo a métodos finitos o constructivos, siendo una prueba de que el sistema formal axiomático resultante (que queda desprovisto de significado) está libre de contradicción.

Al estudio de los sistemas formales con vistas a obtener la demostración de su consistencia lo llamó Hilbert *metamatemática* o *teoría de la prueba*. Esto implica la distinción entre teoría intuitiva, teoría formal y metateoría. La teoría intuitiva³³ es la que va a ser formalizada. La teoría formal expresa en un lenguaje formal puro los contenidos de la teoría intuitiva. Finalmente, la metateoría investiga desde un metalenguaje y con métodos constructivos esa teoría formalizada.

³³ Una teoría intuitiva puede entenderse como una teoría en la que no hay axiomas y tampoco existe una manera rigurosamente formal de extraer teoremas a partir de ellos. Digamos que una teoría intuitiva es aquella en la cual a partir de proposiciones aceptables se busca deducir otras proposiciones también aceptables a través de procedimientos aparentemente sanos.

Así, surge la teoría de la demostración (o metamatemática) la cual es una rama de la lógica matemática que trata a las demostraciones como objetos matemáticos, facilitando su análisis mediante técnicas matemáticas. Las demostraciones suelen presentarse como estructuras de datos que se construyen de acuerdo con los axiomas y reglas de inferencia de los sistemas lógicos. En este sentido, la teoría de la demostración se ocupa de la sintaxis del sistema en cuestión. De acuerdo a Manzano y Huertas:

La teoría de la prueba (...) nació con el denominado programa de Hilbert. La idea de Hilbert era la de explotar al máximo la naturaleza finita de las pruebas para proporcionar una fundamentación de la matemática. Podría resumirse su concepción diciendo que preconizaba una axiomatización de las teorías matemáticas de la que pudiera probarse su:

1. **Consistencia.** Es decir, que nunca se podrá demostrar como teoremas de la teoría una sentencia y su negación.
2. **Compleitud.** Es decir, que cada sentencia –del lenguaje en el que se axiomatizó la teoría- sea ella misma o su negación un teorema de la teoría axiomática.
3. **Decidibilidad.** Es decir, que exista un procedimiento efectivo mediante el cual, en un número finito de pasos, se determine si una sentencia del lenguaje es o no un teorema de la teoría. (Manzano y Huertas, 2004, p. 389)

Para Hilbert, la teoría de la demostración aborda la cuestión de la consistencia mediante dos niveles a tomar en cuenta. Por un lado, el nivel matemático, tal y como queda representado dentro del sistema formal.

Por otro lado, el nivel metamatemático, un nivel de discurso en el que se habla de las matemáticas axiomatizadas. En este nivel se procedería a probar la consistencia mediante una serie de técnicas que estudiarían el sistema formal desde fuera, desconectándolo de cualquier significado numérico o relacionado con el infinito, simplemente como cadenas finitas de signos primitivos a partir de los cuales se pueden generar fórmulas y demostraciones de acuerdo a ciertas reglas predefinidas.

Las proposiciones que se refieren a este esqueleto formal, a esta aritmética vaciada de significado, son las proposiciones metamatemáticas, que no se formulan en el lenguaje objeto sino en el metalenguaje. Es algo así como el español cuando se usa en una clase de inglés para enseñar los matices de uso de alguna palabra extranjera. La pregunta por la consistencia en matemáticas o, equivalentemente, la pregunta de si la fórmula $0 \neq 0$ es demostrable era, en suma, como preguntar si una determinada posición de ajedrez es legal, es decir, si es posible llegar a ella partiendo de la situación inicial de la partida y de las reglas del movimiento de piezas. Para responder, uno no juega al ajedrez, sino que reflexiona sobre el propio juego de ajedrez (Madrid, 2013, pp. 151-152). Así, mediante la metamatemática, Hilbert pretendía lograr demostraciones definitivas construyendo un sistema de signos formales, vacíos de significados, con reglas manifiestas de cómo manipular estos signos. Así, se derivan teoremas a partir de axiomas mediante combinaciones y transformaciones sónicas de acuerdo a reglas de operación que funcionan bajo el principio de un razonamiento explícito.

Mientras que el platonismo³⁴ mantenía que la exactitud de la matemática descansaba en un reino celestial, y el intuicionismo en la mente humana, el formalismo hilbertiano la anclaba al papel escrito. Así, la matemática podría ser vista como un juego de notaciones carentes de significado, como una hilera de signos sobre el papel, vacíos de sentido, pero consistentes con ciertas reglas, como las del ajedrez, para manipularlos (Madrid, 2013, p. 141). Escribe Hilbert:

(...) Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de la manera segura, puede ser identificado. El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no solo de las matemáticas puras, sino en general de todo pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: *en un principio era el signo* (Hilbert, 1993, p. 45)

Así, el programa de Hilbert consiste en construir la ciencia objetiva de la matemática como un sistema lógico-formal puro, cuya condición fundamental es la ausencia de contradicción, prescindiendo de todo tipo de contenido cual si fuera un sistema formal vacío. Así pues, considera que el lenguaje matemático, puede reducirse a operar con signos.

Se puede comprender mejor el razonamiento de Hilbert considerando una analogía. Los números irracionales no tienen

³⁴ El platonismo es la postura tradicional de la filosofía de las matemáticas que las consideraba como originadas en un mundo aparte poblado de objetos ideales, perfectos y eternos. Veremos en la siguiente sección cómo esta antigua postura resucita con Gödel.

significado intuitivo como tales números. Aunque podamos introducir longitudes cuyas medidas sean irracionales, las propias longitudes no proporcionan ningún significado intuitivo a los números irracionales, pero ellos son necesarios incluso para las matemáticas elementales. Hilbert hizo la misma observación al respecto de los números complejos. Estos no tienen contrapartidas reales inmediatas, pero hacen que sean posibles teoremas generales como el de que toda ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces. Independiente de que los símbolos representen o no objetos con un significado intuitivo, todos los signos y símbolos de conceptos y operaciones están libres de significado. Para el propósito de los fundamentos, los elementos del pensamiento matemático son los símbolos y las proposiciones, que son combinaciones o cadenas de símbolos. Así, se lograba la certeza al precio de tratar a la matemática como símbolos vacíos de significado.

6. Platonismo

El, llamado también objetivismo, es el núcleo de la filosofía gödeliana de la matemática. Consiste en la creencia de que los objetos y conceptos matemáticos (las entidades referidas por los símbolos matemáticos), así como los hechos matemáticos (los expresados por las proposiciones matemáticas), no son de nuestra creación, sino que existen objetivamente con total independencia de la existencia y el funcionamiento de nuestra mente. Escribe Piñeiro:

El platonismo sostiene que los objetos matemáticos tienen una existencia objetiva, y que el trabajo de los matemáticos consiste en descubrir las características de esos objetos. El nombre, desde

luego, proviene de Platón, quien afirmaba que nuestras percepciones son solamente el reflejo deformado de una realidad superior que existe en el “mundo de las ideas”. En ese mismo mundo de las ideas habitarían los objetos que los matemáticos investigan; aunque dentro del platonismo matemático hay diferentes matices, esa es la idea esencial (Piñeiro, 2012, p. 150)

Es decir, los objetos y conceptos tratados por las matemáticas no son simples invenciones existentes únicamente en la mente de los matemáticos, sino que son realidades ingénitas, universales, inmatrimiales, imperecederas, inmutables y atemporales. Por ende, tanto los “objetos matemáticos” (números, figuras geométricas, etc.) como las leyes matemáticas no se inventan, sino que se descubren. Por ejemplo, los axiomas de la teoría de conjuntos lejos de crear el concepto de conjunto lo desarrollan y este sería anteriormente dado a nuestra percepción de lo abstracto o intuición matemática. Según Gödel:

Me parece que la asunción de tales objetos es tan totalmente legítima como la asunción de cuerpos físicos, y existen las mismas razones para creer en su existencia. Son necesarios para obtener un sistema satisfactorio de matemática en el mismo sentido en que los cuerpos físicos son necesarios para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles, y en ambos casos es imposible interpretar las proposiciones que uno desea afirmar acerca de tales entidades como proposiciones acerca de “datos”, esto es, las percepciones sensibles que realmente tienen lugar”. (Gödel, 1990, p. 128)³⁵

³⁵ Hemos recogido la traducción de Rodríguez.

Aunque es cierto que las proposiciones matemáticas no dicen nada sobre la realidad espacio-temporal tienen, sin embargo, un contenido objetivo que radica en que dicen algo sobre relaciones objetivas entre conceptos objetivos. (Rodríguez, 2007, p. 178)

Se puede comprender mejor al platonismo, repasando la postura opuesta, es decir, la del formalismo. Esta sostiene que la matemática es simplemente una creación humana, similar en ciertos aspectos a la música. La matemática es, esencialmente, un juego lingüístico (un juego sintáctico) en el que hay ciertos puntos de partida, que son los axiomas, y ciertas reglas lógicas que permiten operar a partir de ellos. El trabajo del matemático consistiría entonces en descubrir hacia dónde nos llevan las reglas del juego (algo no muy diferente en el fondo al trabajo de un ajedrecista que busca la jugada óptima en una cierta posición).³⁶ Finalmente, se puede decir que mientras que el formalismo afirma que los objetos matemáticos no existen por sí mismos, y tienen propiedades que los matemáticos les atribuyen; el platonismo mantiene que los objetos matemáticos existen por sí mismos, y los matemáticos descubren sus propiedades.

En la conferencia “Gibbs”, Gödel afirma que la matemática es inagotable, de modo que no podemos hacer matemática sin recurrir a la intuición, que no puede reemplazarse por métodos puramente algorítmicos. Los conceptos y hechos matemáticos son objetivos, y la mente humana puede percibirlos de una forma que ninguna maquina finita podría (Rodríguez, 2007, p. 179). Así pues, puesto que conocemos

³⁶ Hay que agregar que el formalismo reduce a las matemáticas a fórmulas sin significado con el claro objetivo de probar su consistencia, completud entre otras propiedades.

muchas proposiciones sobre números naturales que son verdaderas, y como estamos convencidos de que muchas conjeturas relacionadas con ellos tienen sentido, entonces deben existir hechos objetivos sobre los números naturales y tales hechos deben referirse a objetos que son inmutables en el tiempo. La lógica y la matemática deben tener un contenido real, que puede verse estudiando teoría de números, donde hallamos hechos que son independientes de las convenciones arbitrarias.

Gödel en *The modern development of the foundation of mathematics in the light of philosophy* empieza por dividir las tendencias filosóficas en derecha (espiritualismo, teología, metafísica) e izquierda (escepticismo, materialismo, positivismo) y señala que la evolución de la filosofía desde el Renacimiento ha ido en la dirección de derecha a izquierda. La matemática ha sido una excepción, pero las dificultades causadas por las paradojas de la teoría de conjuntos han sido usadas como pretexto para moverse también aquí hacia la izquierda. Sin embargo, esas dificultades han sido exageradas. Las antinomias de la teoría de conjuntos ya han sido resueltas de un modo completamente satisfactorio y casi obvio para cualquiera que entienda la teoría. La certeza de la matemática debe conseguirse no mediante la manipulación de símbolos sino mediante el cultivo del conocimiento de los conceptos mismos. (Mosterín, 2000, p. 274)

Para Gödel, el intento russelliano de restringir las clases mediante la teoría de los tipos solo lleva al fracaso. Las entidades abstractas son imprescindibles. Las clases y conceptos son objetos reales, que nosotros no construimos, sino que nos limitamos a describir. Por este motivo, Gödel no rechaza las definiciones impredicativas y critica el principio del

círculo vicioso de Russell pues no posibilita la reducción de la matemática a la lógica y frena el desarrollo de gran parte de la matemática moderna (Mosterín, 2000, p. 266). Es más, en 1946, Gödel sostuvo que las paradojas conjuntistas no deben hacernos dudar de la realidad de los conjuntos matemáticos más de lo que las ilusiones ópticas nos hacen dudar de la realidad de los objetos físicos. (Mosterín, 2000, p. 271)

Gödel, con su famosa prueba metamatemática sostiene que no puede haber una prueba de lo completo de la aritmética que permita también probar su consistencia y viceversa³⁷. En un sistema de axiomas que sea suficiente para generar la aritmética, no se puede saber al mismo tiempo si es consistente y completo. Luego, puede haber fórmulas de la aritmética que son verdad, pero que no pueden ser probadas. Pareciera deducirse a partir de esto que no hay un sistema lógico, por refinado que sea, que resulte suficiente para generar todo el rango de las verdades matemáticas. También, se deduce que no podemos tratar a las matemáticas como lo hubiera deseado Hilbert, a saber, como simples hileras de fórmulas que se pueden probar. Pero, no solo esto podemos colegir. Escribe Piñeiro:

(...) en la conferencia Gibbs de 1951, Gödel sostuvo que sus teoremas de incompletud demostraban la validez del punto de vista platonista. Veamos, en un apretado resumen, cuál era el

³⁷ El primer teorema de incompletud de Gödel (1931) demuestra que la aritmética elemental no puede ser completamente axiomatizada en el sentido de completud deductiva, es decir, no puede axiomatizarse de modo consistente y completo. El segundo teorema dice que si una teoría aritmética T es consistente, entonces la consistencia de T no puede probarse en T , es decir, es imposible demostrar la consistencia de una teoría o sistema formal que incluya la aritmética elemental con los propios recursos de la teoría. Es decir, la consistencia de una teoría aritmética no puede probarse con sus propios medios. (Mosterín y Torreti, 2002, pp. 571-572)

argumento de Gödel. Todos tenemos en nuestra mente una intuición de qué son los números naturales, entendemos cómo se definen sus operaciones fundamentales y cuáles son sus propiedades básicas. Percibimos, por ejemplo, que multiplicar 8 por 5 se equipara a la operación “física” de formar ocho columnas con cinco objetos cada una (...).

Tenemos, en consecuencia, un “modelo mental” de los números naturales, de esos entes, o esa estructura que los matemáticos estudian. Por otra parte, el primer teorema de incompletud demuestra que ese modelo no puede ser completamente caracterizado por métodos sintácticos, es decir, si nos limitamos a los métodos sintácticos de razonamiento, siempre habrá verdades inalcanzables. Los métodos sintácticos de demostración son insuficientes para abarcar todas las propiedades de ese modelo que, semánticamente, somos capaces de comprender. Esto implica, según Gödel, que ese modelo mental, esos entes que llamamos “números naturales”, con todas sus propiedades o relaciones mutuas, existe en una realidad platónica que se encuentra más allá de la mera lingüística. (Piñeiro, 2012, pp. 152-153)³⁸

³⁸ Ahora bien, hay que decir, en honor a la verdad, que estas conclusiones de Gödel han sido cuestionadas por lógicos contemporáneos, como, por ejemplo, Solomon Feferman o Panu Raatikainen, quienes han sostenido que los argumentos de Gödel se basan en supuestos cuya validez es cuestionable (como el hecho de que en todas las mentes humanas existe un mismo modelo de los números naturales). El hecho es que, al momento actual, no existe todavía un consenso unánime acerca de qué relación existe entre los teoremas de Gödel y la naturaleza de los objetos matemáticos. Después de todo, solamente han pasado poco más de 80 años desde la publicación de los teoremas de Gödel, un tiempo demasiado breve como para pretender que hay alguna conclusión filosófica definitiva. (Piñeiro, 2012, pp. 153-155)

Si las matemáticas fueran enteramente hipótesis existentes tan sólo en nuestras mentes, cualquier verdad matemática podría ser formulada y demostrada, cosa imposible por los teoremas gödelianos. Por el contrario, si los conceptos matemáticos son preexistentes la única tarea que realiza el matemático es percibir dicha verdad objetiva y describirla. Tampoco la matemática puede reducirse a un sistema formal de sintaxis lógica de lenguaje pues, por los resultados de Gödel, ningún sistema similar podría realizar una tarea semejante a menos que contase con conceptos igualmente potentes que los que pretenden reducirse, de modo que cualquier intento por esa línea sería inútil por principio.

Los matemáticos con toda su maquinaria operativa y simbólica tan sólo pueden hacer teorías matemáticas subjetivas con una alta aproximación a las verdades matemáticas objetivas, pero sin llegar a conocer éstas en su totalidad. Según esto, las matemáticas objetivas son imperecederas, no varían ni desaparecen independientemente de que alguien las conciba o no. Logramos reconocer los objetos y las verdades matemáticas que se encuentran en las “esferas celestiales de las ideas” mediante la intuición matemática que, de manera similar a un órgano sensorial, hace que los seres humanos percibamos partes de ese otro mundo. La matemática es inagotable, de modo que no podemos hacer matemática sin recurrir a la intuición, que no puede reemplazarse por métodos puramente algorítmicos.

Notamos pues que, con Gödel, todavía hay cierta vida en el “platonismo”. Si en las matemáticas pueden existir verdades que no se pueden probar, las matemáticas no pueden reducirse a las pruebas con las que las construimos. Hay un ámbito de verdad matemática, al que

podemos o no tener acceso a través de nuestros procedimientos intelectuales. Y lo extraordinario es que *esto es algo que también podemos probar*. Es un hecho notable que el ser humano pueda alzarse sobre sus propias limitaciones y proyecte su pensamiento hacia las regiones mismas donde las reglas, normas y mandatos formales no permiten vagar libremente.

7. Dialeteísmo ³⁹

Los lógicos clásicos defienden el principio de no contradicción porque a partir de una contradicción es posible deducir cualquier otra proposición como válida (lo cual ocasiona que todos sus enunciados se conviertan en teoremas). De acuerdo a Palau:

(...) es sabido que desde Aristóteles las contradicciones no tienen lugar en la lógica clásica, ya que si se las admite, la lógica se torna trivialmente inconsistente, i. e., en ella es posible deducir cualquier afirmación. Duns Escoto fue el primero en expresar esta idea mediante el principio conocido como *Ex contradictione quodlibet* (ECQ) o, *Ex falsum sequitur quodlibet* (EFSQ) (...) (2002, p. 159) ⁴⁰

La no-trivialidad se relaciona con el concepto de consistencia. En palabras de Piscoya:

³⁹ Esta parte de la investigación se ha basado en Sierra Casiano (2012, pp. 30-33). Pero, también en las propias investigaciones del tesista publicadas en REFP. (Mora, 2013)

⁴⁰ El principio de *Ex contradictione quodlibet* es: $(A \wedge \sim A) \vdash B$ (ECQ), y el de *Ex falso sequitur quodlibet* es $\sim A \vdash (A \rightarrow B)$ (EFSQ). Pero, ambos son equivalentes en la lógica proposicional porque el segundo resulta de aplicar la equivalencia de exportación al primero previa aplicación de la conmutación al antecedente del mismo.

(...) El concepto principal que decide la aceptabilidad lógica de los cálculos C_n es el de no-trivialidad. Un cálculo C_n es no-trivial si es absolutamente consistente, en otro caso es trivial. Como es conocido, un sistema S cualquiera es absolutamente consistente si existe al menos una fórmula F en S la cual no es deducible en S . En otras palabras, un sistema S es absolutamente consistente cuando el conjunto de sus fórmulas no coincide con el conjunto de sus teoremas. En cambio, un sistema S es simplemente inconsistente cuando desde S puede deducirse tanto una fórmula A como su correspondiente negación $\sim A$, en caso contrario S es simplemente o clásicamente consistente. (2000, p. 245)

Veamos la sencilla demostración de que a partir de una contradicción se puede deducir cualquier fórmula. Tenemos el siguiente caso:

* Perú es un país y Perú no es un país. Por lo tanto, la papa es un tubérculo

En términos formales:

1. $p \wedge \sim p$ // $\therefore q$
2. p 1 Simplificación
3. $\sim p$ 1 Simplificación
4. $p \vee q$ 2 Adición
5. q 4, 3 Silogismo disyuntivo

Como ya lo dijo Piscoya, el hecho de que un sistema contenga una contradicción lo vuelve inconsistente porque mediante la simplificación, la adición y el silogismo disyuntivo se puede hacer que toda fórmula construible sea teorema por el solo hecho de ser construible y no por su

propia validez lógica. Precisamente, esta también es una razón para rechazar las paradojas en la lógica clásica. Si se acepta la contradicción que es generada por la paradoja, la lógica se vuelve inservible pues como todo sería válido, no tendría sentido distinguir razonamientos válidos de inválidos. En términos técnicos, esto significa que el sistema se vuelve trivial, inútil, inservible: puras manchas de tinta. Ahora bien, desde el punto de vista de un sistema paraconsistente tanto una proposición como su negación pueden ser ambas verdaderas sin ocasionar la trivialización del sistema lógico, es decir, sin posibilitar la opción de que cualquier fórmula bien formada sea, a su vez, un teorema. En otras palabras:

Las lógicas paraconsistentes son sistemas lógicos que soportan las contradicciones sin que para ello haya que destruir toda la estructura del aparato deductivo; parten del supuesto de que las contradicciones no siempre conducen al absurdo. De acuerdo con Da Costa, la ventaja de las lógicas paraconsistentes es que permiten las contradicciones y los vacíos de conocimiento; por tanto, pueden servir de base para una teoría que contenga contradicciones y que estas contradicciones no se deban eliminar (Morales, 1999, pp. 1048-1049).

Es decir, antes se solía pensar que al aceptar una contradicción nuestro sistema lógico se volvería trivial. Pero, últimamente, como estamos apreciando, hemos podido ser testigos de la aparición de las lógicas paraconsistentes para las cuales es posible que un sistema albergue contradicciones sin que por ello dicho sistema lógico se trivialice. Tomando como apoyo el desarrollo de estas lógicas en los últimos años, existe una corriente filosófica que ha puesto en duda lo que

parecía ser un principio inamovible e inatacable; a saber, el principio de no contradicción $\sim (A \wedge \sim A)$ (PNC). Este punto de vista que critica el PNC y que acepta que existen algunas contradicciones verdaderas es el llamado ‘dialeteísmo’.

El término ‘dialeteísmo’ fue acuñado por Graham Priest y Richard Routley en 1981. Aunque la postura dialeteísta no es nueva, el nombre que se ha dado a esta corriente filosófica sí lo es. La idea del nombre surgió de un pasaje de *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956), en donde Ludwig Wittgenstein describe a la paradoja de *El Mentiroso* como una figura con la cabeza del dios romano Jano, es decir, como una figura con dos caras; en este caso se trata de la verdad y la falsedad⁴¹. De esta manera, la *aletheia* se vuelve *dialetheia*; de tal modo que una *dialetheia* es una oración de la forma $A \wedge \sim A$, donde tanto A como su negación $\sim A$ son al mismo tiempo verdaderas. De ahí que en 1981 Priest y Routley dieran el nombre de ‘dialeteísmo’ a la postura que afirma que hay contradicciones verdaderas.

Graham Priest ha presentado una variedad de ejemplos y situaciones que nos muestran que el mundo mismo es inconsistente. Por ejemplo, la paradoja de *El Mentiroso* es una *dialetheia* porque constituye una verdad de dos sentidos. Priest valora la consistencia, pero solo de manera comparativa, tal como valora la simplicidad, la generalidad y la utilidad empírica. La consistencia no es más que un rasgo deseable entre

⁴¹ Asimismo, de acuerdo a Sorensen, Wittgenstein se burlaba de los lógicos que pregonaban las contradicciones como desastres intelectuales. Sucede que, en la vida cotidiana, cuando las personas constatan que han caído en contradicción, simplemente ponen un parche sin más al problema. Wittgenstein esperaba el día en el que los lógicos se adaptaran a esta realidad antropológica logrando así emanciparse de la consistencia lógica. (Sorensen, 2007, p. 98)

muchos otros. En el caso de la paradoja mencionada y afines, Priest considera que deberíamos ceder un poco en consistencia para ganar mucho en simplicidad. En particular, deberíamos conceder que el enunciado paradójico es, a la vez, verdadero y falso, y emplear luego las lógicas paraconsistentes para evitar que la contradicción se extienda. Estas lógicas están diseñadas para limitar la exploración con mecanismos seguros. (Sorensen, 2007, pp. 98-99)

Aunque ahora encontramos diferentes tipos de dialeteísmo, el más radical de todos ellos es el dialeteísmo metafísico (o realista), que el mismo Graham Priest ha defendido, pues afirma que en el mundo empírico podemos encontrar *dialetheias*. Pese a las diferentes críticas que hay hacia el dialeteísmo, este ha logrado, de alguna u otra manera, responder a ellas y dar batalla en el debate.

Un hecho importante que se tiene que tomar en cuenta al hablar del dialeteísmo, es que este tiene que ser distinguido del trivialismo. Mientras que el dialeteísmo defiende que solo algunas contradicciones muy específicas son verdaderas, el trivialismo afirma que todas las contradicciones son verdaderas, lo cual los lleva aceptar que cualquier cosa podría ser verdad. Un trivialista tiene que ser dialeteísta, pero lo contrario no es el caso. Si un dialeteísta no quiere aceptar cualquier cosa, y pecar de trivialismo, entonces tiene que aceptar algún tipo de lógica paraconsistente. Esto se debe a que es viable aceptar contradicciones al amparo de ciertas lógicas paraconsistentes, sin que por ello se trivialice una teoría o un sistema lógico.

Apoyar una postura dialeteísta con una lógica paraconsistente es algo que los dialeteístas hacen para dar mayor peso a su argumentación.

Tal es el caso de Graham Priest quien defiende la postura metafísica del dialeteísmo expresada esencialmente en su propio sistema lógico y cuyo supuesto filosófico principal consiste en sostener que el mundo real es inconsistente ya que en él existen *dialetheias*, i.e., proposiciones que son verdaderas y falsas al mismo tiempo las cuales constituyen contradicciones genuinas. Ahora bien, ya que cuando decimos que el mundo es inconsistente, lo que queremos decir es que hay oraciones verdaderas sobre el mundo que son inconsistentes, la argumentación de Priest consistirá en mostrar que hay *dialetheias* que tienen que ver con objetos concretos del mundo.

El dialeteísmo sostiene que existen contradicciones verdaderas, es decir, *dialetheias*. Según esta postura filosófica, oraciones como la de la paradoja de *El Mentiroso*, conjuntos como el de la paradoja de Russell, ciertos tipos de dilemas legales y casos límite de predicados vagos, son ejemplos de contradicciones verdaderas. Un dialeteísta tiene que adscribirse a una lógica paraconsistente para no ser trivial. Así, el dialeteísmo al considerar que algunas contradicciones necesitan ser aceptadas, sin que por ello tengamos que aceptar que podemos derivar cualquier cosa de ellas, constituye una motivación para crear lógicas paraconsistentes.

Como es de esperar, la invalidación de ECQ nos llevará a deshacernos de algunas de nuestras inferencias favoritas. Cuáles sean las inferencias que se tengan que invalidar dependerá del método que se utilice para obtener la lógica paraconsistente. Así, encontraremos sistemas como el de Priest, en donde el principio de no contradicción será

válido, pero el *Modus Ponens* no lo será⁴²; o algunos sistemas como los de da Costa, en donde sucede lo contrario: el *Modus Ponens* resulta válido, y el principio de no contradicción resulta inválido. La validez o invalidez de las inferencias dependerá también de los fines para los que ha sido creado cada sistema de lógica paraconsistente.

Según el *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia* de Mosterín y Torreti (2010: 364-365), la lógica paraconsistente estudia sistemas lógicos apropiados para la construcción de teorías formales inconsistentes, pero no triviales. Tales sistemas permiten razonar desde conjuntos de premisas contradictorias sin que se pueda, en general, deducir todo de ellas, como en la lógica clásica. Da Costa ideó una jerarquía infinita de sistemas formales de lógica proposicional en los cuales la siguiente regla $(A \wedge \sim A) \vdash B$ no se postula ni se puede derivar. Esta jerarquía se conoce con el nombre de C_n , $1 \leq n \leq \omega$. El primero de ellos, llamado cálculo proposicional C_1 , incluye ocho axiomas esquemáticos tradicionales, y la regla de inferencia *Modus Ponens*. A estos se agregan otros siete axiomas esquemáticos –donde X^0 abrevia la fórmula del principio de no contradicción, $\sim (A \wedge \sim A)$ –, a saber,

$\vdash B^0 \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$	1er. AXIOMA
$\vdash A \vee \sim A$	2do. AXIOMA
$\vdash \sim \sim A \rightarrow A$	3er. AXIOMA
$\vdash A^0 \rightarrow (\sim A)^0$	4to. AXIOMA
$\vdash A^0 \wedge B^0 \rightarrow (A \wedge B)^0$	5to. AXIOMA
$\vdash A^0 \wedge B^0 \rightarrow (A \vee B)^0$	6to. AXIOMA

⁴² Asimismo, en el sistema de Priest resulta válido el principio del tercero excluido e inválido EFSQ. (Palau, 2002, p.153)

$$\vdash A^0 \wedge B^0 \rightarrow (A \rightarrow B)^0$$

7mo. AXIOMA

El primer axioma dice que si B es una fórmula “bien portada” (esto es, cuya incompatibilidad con su propia negación $\sim B$ sea demostrable)⁴³, entonces una fórmula A que demostrablemente implique a B y $\sim B$ es demostrablemente falsa (según da Costa y Lewin (2005, p. 195), este axioma dice que el principio de reducción al absurdo se puede aplicar siempre que la oración B no sea contradictoria. Los axiomas 2 (tercio excluso) y 3 (doble negación) que son rechazados por la lógica intuicionista, son admitidos por la lógica paraconsistente. Los últimos cuatro axiomas aseguran que las fórmulas compuestas mediante los conectores verifuncionales sean tan “bien portadas” como sus respectivos componentes (Estos axiomas, en palabras de da Costa y Lewin, dicen que el buen comportamiento se extiende a las oraciones complejas).

Asimismo, para $1 \leq n < \omega$ definimos

$$A^n = A^{000\dots 0} \text{ (n veces) } y$$

$$A^{(n)} = A^0 \wedge A^{00} \wedge A^{000} \wedge \dots \wedge A^n$$

⁴³ Pensemos en, por ejemplo, la paradoja de Russell. Precisamente, las lógicas paraconsistentes sirven también para dar cuentas de problemas que surgen en la aritmética, la teoría de conjuntos y la semántica formal. Entre la lista de problemas encontramos la mencionada paradoja acerca del conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Considérese el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos; llamemos a este conjunto R .

1. Si **R es miembro de sí mismo**, entonces es uno de los conjuntos que no es miembro de sí mismo; por lo tanto, no es miembro de sí mismo.

2. Si **R no es miembro de sí mismo**, entonces es uno de los conjuntos de R ; por lo tanto, es un miembro de sí mismo.

Conclusión: R es miembro y no es miembro de sí mismo.

Ya sea que R sea o no sea miembro de sí mismo (podemos elegir una de las dos opciones por medio de la ley del tercero excluido), en ambos casos la proposición es verdadera y falsa a la vez. No importa si elegimos 1. R es miembro de sí mismo o 2. R no es miembro de sí mismo, la oración elegida tendrá que ser verdadera y falsa al mismo tiempo para cumplir con lo que dice.

Además, los cálculos C_n , $1 < n < \omega$, se obtienen reemplazando los axiomas 1, 5, 6 y 7 por los siguientes que los incluyen de forma generalizada:

$\vdash B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$ Reemplaza al 1er axioma

$\vdash A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow (A \rightarrow B)^{(n)} \wedge (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)}$ Reemplaza a los axiomas 5, 6 y 7

También, C_ω está definido por los siguientes 10 axiomas (donde todos son parte de C_1) y la regla *Modus Ponens*:

$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

$\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$

$\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$

$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

$\vdash A \rightarrow (A \vee B)$

$\vdash B \rightarrow (A \vee B)$

$\vdash \sim \sim A \rightarrow A$

$\vdash A \vee \sim A$

$A, (A \rightarrow B) \vdash B$

Finalmente, en los cálculos C_n , $n < \omega$, se define la negación fuerte

$$\sim *_n A = \sim A \wedge A^{(n)} \quad (\alpha)$$

Con respecto a esto, de acuerdo a Piscoya (2009, pp. 217-218) para el caso C_1 la fórmula “ $\sim (A \wedge \sim A)$ ” es abreviada por A^0 y la negación fuerte es introducida a través de la definición $\sim * A = \sim A \wedge A^0$. Asimismo, una

fórmula de tipo “ $A \wedge \sim * A$ ” trivializa al sistema C_1 . Además, usando la equivalencia (α) y generalizando podemos decir que cada fórmula del tipo “ $A \wedge \sim *_{(n-1)} A$ ” trivializa C_n . Y, se dice que un sistema S es finitamente trivializable cuando existe una fórmula F que añadiéndola como axioma trivializa S . En este sentido puede demostrarse que los cálculos C_n son finitamente trivializables. Asimismo, una consecuencia inmediata de lo anterior es que los cálculos C_n más débiles son menos trivializables que los más fuertes.

Esto es visible a partir del hecho de que “ $A \wedge \sim *_{(n-1)} A$ ” trivializa C_n pero no C_{n+1} . Resumiendo, podemos expresar esto último en dos teoremas que figuran en da Costa y Lewin (2005, p. 196):

- Los sistemas C_n , $1 \leq n \leq \omega$, son no triviales. Los C_n , $1 \leq n < \omega$ son finitamente trivializables, pero C_ω no lo es.
- Los axiomas de C_n , $1 \leq n < \omega$, son independientes. Cada sistema es estrictamente más fuerte que los que lo siguen.

Según Miró Quesada, C_n tiene diversas aplicaciones. Por ejemplo, si tenemos C_1^- (que contiene a C_1 y el símbolo de la igualdad, entre otros elementos) podemos con este sistema desarrollar la matemática clásica sin mucha complicación y además ofrece una solución definitiva a las paradojas. Así pues, si era posible desarrollar la matemática sin preocuparse por las paradojas, entonces las paradojas podían multiplicarse sin límite. De esta manera N. C. A. da Costa y su grupo comenzaron a explorar el reino de los objetos matemáticos contradictorios.⁴⁴

⁴⁴ Se cuenta una curiosa anécdota al respecto. Bertrand Russell le habría increpado a Meinong que su teoría admite enunciados contradictorios tales como “El cuadrado que no es cuadrado es

Como resultado de esta exploración, tenemos una manera de tratar a la paradoja de Russell. Por ejemplo, el conjunto russelliano: $R_0 = \{x / x \notin x\}$ tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

$$(1) \chi \in R_0 \rightarrow \{\chi\} \in R_0; R_0 \in R_0 \wedge R_0 \notin R_0; \perp \cup R_0 = T_1 \dots^{45}$$

El conjunto R_0 trivializa NF⁴⁶ (el sistema de Quine) pero no trivializa NF₁. El concepto de conjunto russelliano ha sido generalizado utilizando el concepto de negación fuerte, definido de la siguiente manera

$$(2) \sim * A =_{df} \sim A \wedge A^0, \text{ en que } A^0 \text{ es la abreviación de } \sim(A \wedge \sim A)$$

Utilizando los simbolismos $A^n = A^{0000\dots 0}$ en que “o” aparece n veces y $A^{(n)} = A^1 \wedge A^2 \wedge \dots \wedge A^n$, se define un conjunto russelliano para cada jerarquía de C_n ($1 \leq n < \omega$):

$$(3) R_0 = \{x / x \notin x \wedge (x \in x)^0\}$$

Empleando las jerarquías de C_n (para $n > 1$), y realizando las correspondientes adaptaciones de detalle, se obtienen los sistemas NF₁, NF₂, ..., NF _{ω} . Cada uno de estos sistemas es una teoría inconsistente de

cuadrado” y “El cuadrado que no es cuadrado no es cuadrado”. Ante esto el propio Meinong le respondió sosteniendo que ciertos principios lógicos no son válidos en ciertas ontologías, en particular, que el Principio de no Contradicción no es válido en el dominio de los objetos imposibles, o sea, de los objetos contradictorios. (Palau, 2002, p. 160)

De este modo, podemos entender que la lógica paraconsistente también se aplica a la ontología, la disciplina de las características más generales de lo que existe. Si se usa la lógica tradicional como lógica de la ontología, entre los objetos existentes no se encuentran, automáticamente, ciertos objetos “inconsistentes” como, por ejemplo, el conjunto de Russell. Sin embargo, cuando recurrimos a una lógica paraconsistente todo cambia. Como se sabe, hay teorías de conjuntos donde el conjunto de Russell “existe”. Luego, una ontología fundada en una lógica paraconsistente, puede, en principio, contener objetos contradictorios. Aceptar o no esa tesis implica, obviamente, que se argumente en profundidad y se analice los cimientos tanto de la lógica como de la ontología. En cierto sentido, se puede sustentar que mientras más débil sea nuestra lógica, más rica será nuestra ontología. (Da Costa y Lewin, 1995, pp. 198-199)

⁴⁵ En este caso, $\perp$ y T se refieren a cualquier fórmula reducible a una contradicción y una tautología respectivamente.

⁴⁶ NF es un sistema lógico que Quine construye en su artículo “Nueva fundamentación de la lógica matemática”. (Quine, 2002, p. 131-155)

los conjuntos, pero no trivial. En NF_1 se puede derivar R_0 , es decir, se obtiene la paradoja de Russell, que no trivializa el sistema. En NF_2 se puede derivar R_1 , que trivializa NF_1 pero no NF_2 , y así sucesivamente. (Miró Quesada, 1988, pp. 608-610)

8. Balance final

La paradoja de Russell ha recibido diversas lecturas de parte de las escuelas que buscan fundamentar la matemática. Dentro del logicismo, el propio Russell consideró que se trata de una expresión carente de significado. Por ello, sugirió adoptar una teoría lógica que permita estipular cuándo una fórmula tiene o no significado. Esta es la teoría de los tipos. El axiomatismo de Zermelo consideró que hacía falta un sistema de axiomas que fuera susceptible de no dar lugar a contradicción. Entonces, esta expresión para Zermelo tendría su origen en una improvisada teoría elaborada intuitivamente y sin rigor alguno. El intuicionismo asumió que las paradojas aparecen por la asunción sin más de determinados principios y reglas que no son válidos del todo. Por este motivo, la lógica intuicionista buscó modelar el correcto razonamiento matemático mediante un sistema axiomático que prohibiera el tercio excluso, la reducción al absurdo y la doble negación. El formalismo de Hilbert buscó estudiar la matemática como teoría para determinarla dentro de los cánones de la consistencia. Así, consideró que la paradoja de Russell podría ser desechada mediante una revisión minuciosa de la teoría y sus fundamentos. El platonismo de Gödel minimizó la aparición de paradojas en la teoría de conjuntos. Según él, estas solo eran ilusiones sobre los objetos matemáticos que podían ser claramente explicadas de

la misma manera en la que lo son las ilusiones ópticas sobre los objetos físicos. Finalmente, desde el dialetheísmo de Priest puede asumirse que la paradoja es algo que no debe excluirse del ámbito de lo real. Así, se afirma que existen contradicciones verdaderas que pueden ser analizadas desde una lógica paraconsistente.

CUESTIONARIO # 2

1. ¿Qué corriente filosófica busca fundamentar las matemáticas en la lógica?

- a) Formalismo.
- b) Logicismo.
- c) Intuicionismo.

2. ¿Quién desarrolló la teoría de los tipos para evitar la paradoja de las clases?

- a) Frege.
- b) Gödel.
- c) Russell.

3. ¿Qué filosofía de las matemáticas considera que la actividad matemática se basa en construcciones mentales?

- a) Formalismo.
- b) Intuicionismo.
- c) Platonismo.

4. ¿Cuál es una crítica que enfrentó el logicismo?

- a) Uso excesivo de intuiciones subjetivas.
- b) Genera contradicciones como la paradoja de Russell.
- c) Dependencia de definiciones persuasivas.

5. ¿Qué sistema filosófico considera las entidades matemáticas como existentes independientemente del pensamiento humano?

- a) Platonismo.
- b) Axiomatismo.
- c) Dialeteísmo.

6. ¿Qué axioma propuso limitar Zermelo para enfrentar a la paradoja de Russell?

- a) El axioma de comprensión.
- b) El axioma de elección.
- c) El axioma del conjunto potencia.

7. ¿Qué postura matemática rechaza la existencia de infinitos actuales?

- a) Intuicionismo.
- b) Logicismo.
- c) Formalismo.

8. ¿Qué característica define al formalismo?

- a) Uso exclusivo de axiomas y reglas sin interpretación semántica.
- b) Fundamentación en intuiciones matemáticas.
- c) Dependencia de estructuras lógicas no clásicas.

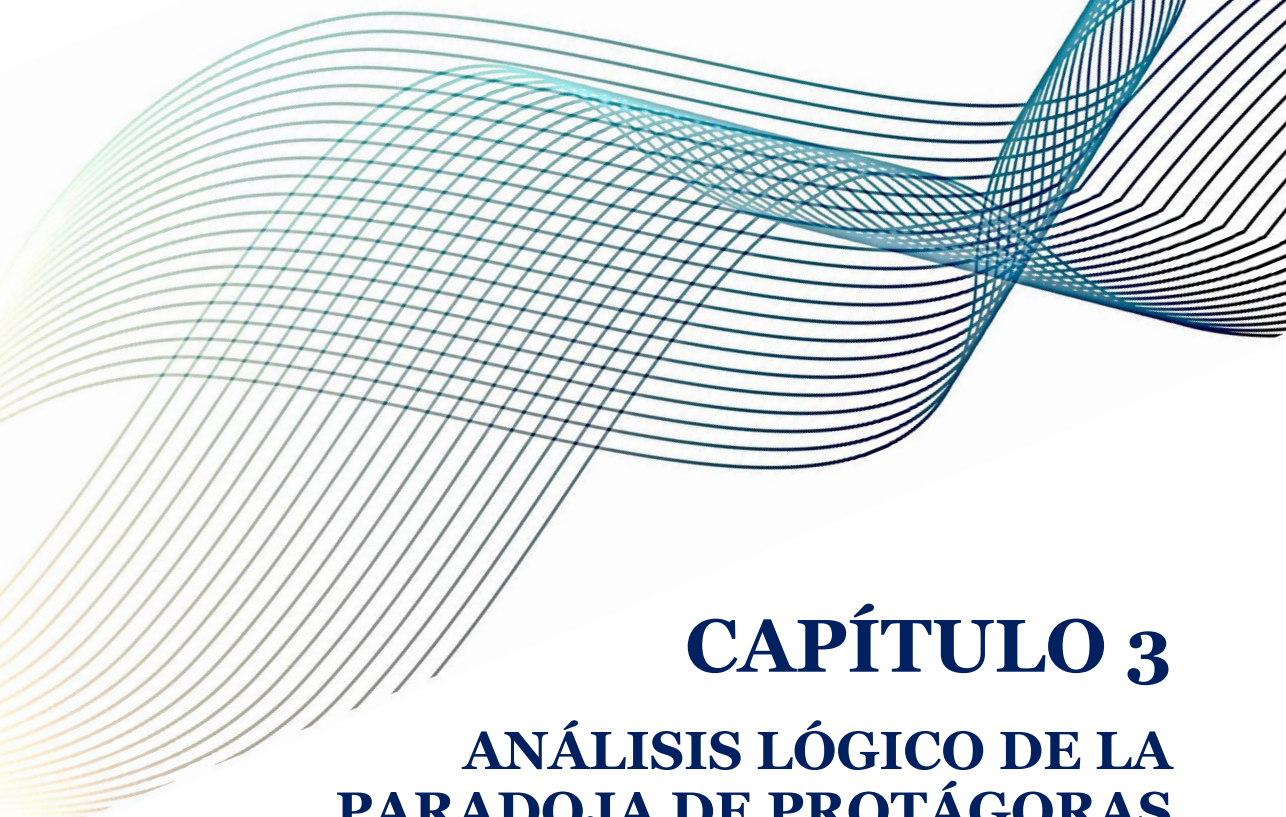
9. ¿Qué problema buscaba resolver la teoría de los tipos de Russell?

- a) Las paradojas deónticas como la de Ross.
- b) Las contradicciones en la teoría de conjuntos.
- c) La falta de una teoría científica coherente.

10. ¿Qué enfoque filosófico propone el dialeteísmo en matemáticas?

- a) Aceptar contradicciones sin caer en trivialismo.
- b) Rechazar todas las paradojas como falsídicas.
- c) Adoptar una postura puramente formalista.

Solucionario: 1b, 2c, 3b, 4b, 5a, 6a, 7a, 8a, 9b, 10a.



CAPÍTULO 3

ANÁLISIS LÓGICO DE LA PARADOJA DE PROTÁGORAS

Resumen: El siguiente artículo se divide en cuatro partes. En la primera, explico el relativismo de Protágoras, así como una de sus principales críticas. En la segunda, expongo la paradoja del sofista griego y busco relacionarla con las paradojas de *El puente* y *El Quijote*. En la tercera, presento el lenguaje básico de la lógica deóntica. Finalmente, en la cuarta, reformulo la paradoja de Protágoras en dicho lenguaje lógico y procedo a señalar sus posibles soluciones.

1. El relativismo de Protágoras

En el siglo V a. C. la vida cultural griega se había desplazado hacia Atenas. En esta ciudad se había desarrollado una forma democrática de gobierno. La recién fundada democracia confería a los ciudadanos el poder para dar su opinión en los asuntos públicos. Así, los ciudadanos atenienses pronto descubrieron que manejar la capacidad de persuadir a sus conciudadanos en la asamblea o ante un tribunal judicial constituía una gran ventaja política. Entonces, para adquirir y perfeccionar estas habilidades recurrían a maestros itinerantes de oratoria y retórica. Estos maestros fueron los llamados sofistas, palabra que deriva del griego “σοφία” (sabiduría), y que significa “sabio” (en griego “σοφός”).

Los sofistas sabían cómo a cada argumento esgrimirle otro en contra y, a cambio de dinero, enseñaban cómo ser exitoso. Sin embargo, en este caso no hay que entender la expresión “exitoso” como sinónimo de la expresión “cómo ser bueno o como ser virtuoso”. Para los sofistas “alcanzar el éxito” significa “lograr ser rico y famoso”. Los sofistas, que podían recibir una paga generosa a cambio de sus servicios, solían utilizar sus habilidades lingüísticas para defender cualquier posición que se les propusiera sin importar lo absurda o nefasta que pareciera.⁴⁷

⁴⁷ Según Roy Sorensen, en este contexto histórico-social los atenienses en ascenso (los “nuevos ricos”) tenían pocas alternativas para el pago por el aprendizaje de tan valiosas técnicas. La oratoria (entre otras técnicas) era muy valorada en esta sociedad cada vez más litigante. A veces, había tantas demandas legales que los perdedores comenzaron a demandar a sus vecinos sólo para pagar a los vencedores. Los abogados demandaron a los abogados. Los estudiantes de derecho demandaron a sus maestros. Los maestros demandaron a los estudiantes (Sorensen, 2003, p. 62). Así, en esta situación puede entenderse el origen de la paradoja de Protágoras, la misma que explicaremos en la segunda parte de este artículo.

El sofista más famoso fue Protágoras de Abdera (siglo V a. de J.C.) quien consideró al ser humano como el dueño de su propio destino. Según el sabio de Abdera, el hombre, que habita un universo indeterminado, debe confiar en sus propios recursos para crear verdades que de otra manera no podrían existir. Así, según Protágoras: “El hombre es la medida de todas las cosas”. En griego “Πάντων χρημάτων μέτρον ἄνθρωπος”. A este principio se le llama abreviadamente *homo mensura* que quiere decir “el hombre medida”.

La postura de Protágoras ha sido conocida con el nombre de relativismo y se la considera un tipo de escepticismo. Según Óscar García:

El *escepticismo relativista* enseña que hay una verdad; pero esta verdad tiene una validez limitada. No hay ninguna verdad universalmente válida. (...) Toda verdad es relativa, tiene sólo una validez limitada. Pero el relativismo subraya la dependencia de todo conocimiento humano respecto a factores externos. Como tales considera, ante todo, la influencia del medio y del espíritu del tiempo, la pertenencia a un determinado círculo cultural y los factores determinantes contenidos en él. (García, 2004, p. 83)

Pondremos unos ejemplos para aclarar esto. Primer ejemplo. Cuando un zapato se nos rompe, ¿esto es bueno o malo? En este caso existen las dos posturas. Es malo para mí porque era mi zapato, porque me servía para caminar cómodamente. Pero, a su vez es bueno para el vendedor de zapatos puesto que el podrá ganar dinero ofreciéndome otro nuevo par.

Segundo ejemplo. En nuestro país, el Perú, la temperatura suele ser tropical. Digamos que tenemos una temperatura promedio: no hay

sequías, pero tampoco cae nieve (al menos en Lima hasta enero del 2015). ¿Cómo sentiría la temperatura un habitante del África que llega de visita al Perú? Alguien así, acostumbrado a altísimas temperaturas, dirá que en nuestro país siente frío. En cambio, ¿Cómo sentiría la temperatura un habitante de la Antártida que llega de visita al Perú? Alguien así, acostumbrado a bajísimas temperaturas, dirá que en nuestro país siente calor. Pero ¿nuestro clima es frío o caluroso? Eso depende de quién lo sienta. La sensación es relativa.

Últimos ejemplos. ¿Es correcto saludarnos entre hombres con un beso en la mejilla? En Argentina, sí; pero en Perú, no tanto. ¿Es algo normal ser polígamo? En Perú, no se ve tan bien; en países árabes, suele suceder con más frecuencia. ¿Hay un solo dios o muchos? Para los judíos, solo uno; para los hindúes, existen varios. En síntesis, la decisión sobre lo correcto, normal o moral es relativo, no es un algo universalmente válido.

Sin embargo, con respecto al relativismo, Hessen (1975, pp. 42-44) plantea un problema teórico muy serio. Cuando el relativismo juzga que no existe verdad universalmente válida cae en una contradicción. Una verdad que no sea universalmente válida representa un sinsentido. Por ejemplo, cuando alguien dice que “Sólo hay verdades en relación con una humanidad determinada” es posible replicarle diciéndole: “Con arreglo a tus propios principios, este juicio sólo es válido para el círculo de la cultura occidental al que tú perteneces. Pero yo procedo de un círculo cultural diferente y puedo afirmar que toda verdad es absoluta y este último juicio se halla tan plenamente justificado como el tuyo”.

Aclaremos esto. Si alguien dice: “Todo es relativo”, entonces eso significa que no existen verdades universales. Esto quiere decir que no todos tienen que sentir calor, o que no a todos tiene que gustarle comer *cuy chactado*, o que no a todos debe parecerle bueno la guerra entre Palestina e Israel. Siempre habrá gente que apoye tal o cual planteamiento. Pues bien, si esto es así, entonces podemos afirmar que inclusive no a todos tiene que parecerle que todo sea relativo. Habrá personas que consideren que sí, efectivamente, todo es relativo, pero también habrá personas que consideren que todo es absoluto. Por lo tanto, no es tan cierto eso de que todo sea relativo. Esto último, obviamente, constituye una contradicción. En palabras de Simon Blackburn:

(...) el pasaje [del *Teeteto*] contiene el clásico argumento “rebotante”, un golpe de judo pensado para incomodar al relativista Protágoras. La idea es que la posición relativista, ejemplificada aquí por la doctrina de que el hombre es la medida de todas las cosas, sale rebotada hacia atrás. Se adelanta como algo aceptable, como algo *verdadero*. Pero en cierto modo es incompatible con las consecuencias de la propia doctrina, ya que niega que la verdad tenga el significado que le da el sentido común (los “densos miles”). En suma, si la doctrina de la medida es verdadera, entonces su propia verdad la refuta. Y esto quiere decir que no es verdadera. (2006, p. 53)

2. La paradoja de Protágoras

De acuerdo a Michael Clark (2009, p.14) el primero que expuso esta paradoja también conocida con el nombre de “paradoja de los abogados” fue Aulo Gelio (circa 150). Diógenes Laercio (1985, p. 204) la repitió más tarde. En lo que sigue nosotros brindaremos la versión de este último.

Se sostiene que Protágoras era un profesor que transmitía sus conocimientos a los hijos de las familias ricas de Grecia a cambio de grandes sumas de dinero. Los cursos eran rápidos y eficaces, y entre las enseñanzas gran parte la ocupaba la abogacía o retórica, “saber” cuyo nombre en ese tiempo era el de ‘arte de argüir ante los tribunales’. (Copi y Cohen, 2009, p. 314). Un día, Euatlo⁴⁸, un joven que deseaba aprender el arte de la oratoria, se acercó a Protágoras para pedirle que le enseñara. Protágoras aceptó y acordó enseñarle la oratoria forense a cambio de una paga: la mitad al inicio y la otra mitad después de que Euatlo defendiera y ganara un caso. Como pasó mucho tiempo sin que se diera la condición pactada, Protágoras pidió el resto del dinero. Euatlo, sin embargo, respondió que aún no había ganado ni defendido ningún caso. Ante esto, Protágoras no se conformó y lo demandó.

Cuando ambos estuvieron ante los jueces, Protágoras dijo: "Joven necio, de cualquier forma, que se resuelva este pleito, deberás pagarme. Si te condenan, me pagarás por sentencia, y si te absuelven, me pagarás

⁴⁸ Este personaje parecer haber sido inventado por la tradición filosófica. De hecho, su nombre, en realidad, más que un nombre propio parece una descripción muy específica. De acuerdo al diccionario VOX: “Eu”, significa “bueno”; mientras que “atlo” podría provenir de “*αθλέω*” que significa “luchar, combatir, arrostrar”. Por ende, “Eu-atlo” significa “el buen contrincante”. Esta persona tendría el nombre ideal como para hacerle frente al sabio sofista. (Pavón, 1973, p. 12)

por nuestro acuerdo". A lo que Euatlo respondió: "Sabed, maestro sabio, que no tengo que pagaros en ningún caso. Si los jueces me absuelven, quedo libre por sentencia; y si pierdo el pleito, me quedo libre por el acuerdo entre nosotros".

En otras palabras, Protágoras había pactado con Euatlo que le enseñará Derecho a cambio de una cantidad que le habría de pagar cuando haya ya ganado su primer caso. Esto es del todo coherente puesto que cuando el discípulo aplica los conocimientos del maestro logrando el resultado esperado, aquel saber se revela como útil y en retribución habría que reconocer el talento del maestro mediante el pago correspondiente; en cambio, si ocurriese lo contrario, la misma falla a la hora de aplicar los conocimientos adquiridos revelaría que aquel saber no tuvo el valor suficiente. Después de la instrucción, Euatlo no participa en ningún pleito y Protágoras, impaciente, lo demanda.

El razonamiento de Protágoras consiste en que, si él gana, el tribunal obligará a Euatlo a pagarle sus honorarios; y si él pierde, Euatlo habrá ganado un caso y también estará obligado por el pacto a pagarle. Euatlo, en cambio, argumenta que, si Protágoras gana, él no estará obligado a pagar, dado que aún no habrá ganado ningún caso; si Protágoras pierde, el tribunal decidirá que no tiene obligación de pagar. (Clark, 2009, p. 13). Puestas así las cosas ¿Quién tiene la razón? ¿A favor de quién debe fallar el tribunal? ¿Cuál debe ser la decisión final del juez?

Resulta curioso observar que esta paradoja está cómicamente relacionada con el relativismo de Protágoras. Siendo Protágoras un relativista, al parecer su discípulo Euatlo logra aprender tan bien su doctrina que incluso consigue poner en aprietos a su maestro, el mismo

que resulta relativizado. La expresión “Euatlo debe pagar los honorarios a Protágoras” resulta en sí misma relativa. Para Protágoras será cierto; pero no necesariamente es cierta para Euatlo. Lo más desconcertante es que incluso ambas posturas pueden probarse mediante argumentación lógica.

Existe otra paradoja que, en opinión de Clark, guarda similitud con la prístina paradoja de Protágoras. Esta recibe en nombre de *El puente* y se expone a continuación con el fin de verificar la semejanza detectada.

Sócrates llega a un puente vigilado por un poderoso señor, Platón, y le ruega que le permita cruzar. Éste le contesta:

“Juro que si la próxima cosa que digas es verdadera, te dejaré pasar, pero si es falsa, te arrojaré al agua”.

Sócrates responde:

“Me vas a arrojar al agua”.

Si Platón no lo tira al agua, Sócrates habrá dicho algo falso y mecerá que lo arrojen; pero, si Platón lo arroja, Sócrates habrá dicho una verdad y no merece ser arrojado al agua. (Clark, 2009, p. 214)

Este es el sofisma XVII de la obra “*Sophismata*” escrita por Juan Buridán en el siglo XIV pero se remonta a Crisipo (circa 280-circa 207 a. C.). Esta misma paradoja fue luego recuperada para la literatura y, por ello, también se le conoce como la paradoja de Miguel de Cervantes Saavedra o la paradoja de *El Quijote* (1995, pp. 409-411) la cual se narra, en la segunda parte de *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha*. Vamos a exponerla solo para mostrar que esta es un ejemplar de *El puente*.

Se dice que apenas Sancho Panza logró ser alcalde de Barataria, tuvo que resolver una consulta jurídica inmediata que un forastero planteó detalladamente de la siguiente manera:

Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío [...] Sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una como casa de audiencia, en la cual habían de ordinario cuatro jueces, que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente, y del señorío, que era en esta forma: “Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna”. Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, y luego, en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: “Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento y, conforme a la ley debe morir, y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre. Pídesse a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces (...) (Cervantes, 1995, pp. 409-411)

Desde un punto de vista lógico, no se puede tomar una decisión, ya que si la oración “Voy a morir en la horca que allí está” es falsa, entonces debe ser colgado, lo cual implica que la oración es verdadera. Por otra parte, si la oración es verdadera, entonces lo deben dejar pasar

por el puente, pero cuando esto suceda la oración será falsa. Y así sucesivamente hasta el infinito. En términos lógicos:

- 1) Si “p” es falsa, entonces debe ser colgado; pero si es colgado, entonces “p” es verdadera.
- 2) Si “p” es verdadera, entonces debe pasar por el puente; pero si pasa, entonces “p” es falsa.
- 3) Si “p” es falsa⁴⁹

Con respecto a la paradoja de los abogados ocurre algo similar.⁵⁰ El tribunal podría razonar que, si decidiese fallar a favor de Euatlo, este ganaría un caso y estaría obligado por el pacto a pagar los honorarios a su maestro, pero si esto ocurriera, entonces debería fallar a favor de Protágoras. Sin embargo, si fallara a favor de Protágoras, entonces, Euatlo no estaría obligado por el pacto a pagar, pero si esto ocurriera,

⁴⁹ Ahora, formalmente, precisemos este argumento paradójico mediante un lenguaje más claro.

1. Lo que dice el pasante es la oración “Voy a morir en la horca”.

2. Si la oración antedicha es verdadera, el pasante no morirá en la horca, y si no muere en la horca, entonces pasará por el puente.

3. Si la oración antedicha es falsa, el pasante morirá en la horca.

Por lo tanto, lo que dice el pasante es verdadero si y solo si es falso.

Formalicemos esta paradoja mediante el lenguaje de la lógica de segundo grado con identidad. Esta es la notación utilizada: *t* es la abreviatura de lo dicho por el pasante, *m* es el significado de lo dicho por el pasante o sea la oración “Voy a morir en la horca”, *p* es el significado de la oración “Voy a pasar por el puente”. “*F*” indicará la propiedad de ser una falsedad o mentira, y “*V*” la propiedad de ser verdadera.

1. $t=m$

2. $[V(t) \rightarrow \sim m] \wedge (\sim m \rightarrow p)$

3. $F(t) \rightarrow m$ // $\therefore V(t) \leftrightarrow F(t)$

⁵⁰ El propio Rescher (2001, p. 65) al comparar la paradoja de *El Quijote* y la de Protágoras observa que tienen exactamente la misma estructura genérica. Sobre esta base, los estoicos caracterizaban tales paradojas como basadas en un “patear el tablero”. Se puede notar una simetría fundamental en la que todo lo que se puede decir desde un lado se puede decir para defender la contraparte. Es decir, tenemos la situación en la que aparecen argumentos no sólo igualmente convincentes, sino, en realidad, estructuralmente idénticos que pueden servir para fundamentar una tesis *P* como su negación no-*P*.

entonces debería fallar a favor de Euatlo, y así sucesivamente hasta el infinito.

1) Si el tribunal falla a favor de Euatlo, entonces este ganaría su primer juicio y le debería pagar los honorarios a su maestro; pero si el tribunal falla a favor de Protágoras, entonces le debería pagar sus honorarios.

2) Si el tribunal falla a favor de Protágoras, entonces Euatlo no habría ganado su primer juicio y no debería pagarle sus honorarios; pero si el tribunal falla a favor de Euatlo, entonces no debería pagarle sus honorarios.

3) Si el tribunal falla a favor de Euatlo...

Para mostrar este mismo problema desde otra perspectiva igualmente paradójica podemos construir tanto el dilema (o argumento) de Protágoras como el contradilema (o contra-argumento) de Euatlo. Protágoras, quien sostiene que Euatlo tiene que pagarle, dice:

“Si gano este juicio, entonces (en virtud de mi demanda válida) tendrás que pagarme, pero si no gano, entonces (a causa de nuestro pacto), tendrás que pagarme. Además, gano o no gano este juicio. Por lo tanto, tú, Euatlo, tendrás que pagarme”.

Formalizando tenemos:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim p)] \rightarrow q$$

Euatlo, quien sostiene que él no está obligado a pagarle, dice:

“Si gano este juicio, entonces (a causa de que tu demanda no fue validada) no estoy en la obligación de pagarte, pero si no gano este juicio, entonces (en virtud de nuestro pacto) tampoco debo pagarte.

Además, gano o no gano este juicio. Por lo tanto, no estoy en la obligación de pagarte”.

Formalizando tenemos:

$$[(a \rightarrow \sim q) \wedge (\sim a \rightarrow \sim q) \wedge (a \vee \sim a)] \rightarrow \sim q$$

Tomemos en cuenta que Euatlo dijo lo mismo que dijo Protágoras para defenderse siendo al mismo tiempo sus discursos contradictorios entre sí. A estas argumentaciones opuestas se le conoce como antilogías y fueron estudiadas por Protágoras. Esta simetría argumentativa hace más interesante y compleja la paradoja de los abogados en comparación con la de *El puente* y la de *El Quijote*.

Sin embargo, así como hay evidentes semejanzas entre la paradoja de Protágoras y la de *El puente* también existen ciertas diferencias que debemos notar. La diferencia primordial está en que en *El puente* solo hay un argumentador que mediante su aserción introduce la paradoja, en cambio, en la paradoja de Protágoras existen dos posiciones contrapuestas que son ambas válidas desde sendos puntos de vista. Otra diferencia reside en que la mentada paradoja difiere de la paradoja de *El puente* porque esta última solo usa nociones proposicionales vinculadas a la verdad o la falsedad mientras que la de Protágoras hace uso de operadores deónticos. A continuación, usaremos lógica deóntica con el fin de reformular en este lenguaje la paradoja de Protágoras.

3. Análisis lógico de la paradoja de Protágoras

En esta parte, utilizaremos el lenguaje deóntico para poder reformular la paradoja de los abogados. En este caso, lo paradójico será

que el tribunal favorezca y no favorezca tanto al acusado como al demandante.

1. Si el tribunal favorece a Euatlo, entonces Euatlo gana el juicio y es obligatorio que Euatlo le pague los honorarios a Protágoras.

2. Si el tribunal favorece a Protágoras, entonces es obligatorio que Euatlo pague los honorarios a Protágoras.

3. Si el tribunal favorece a Protágoras, entonces Euatlo no gana el juicio y no es obligatorio que Euatlo pague los honorarios a Protágoras.

4. Si el tribunal favorece a Euatlo, no es obligatorio que Euatlo le pague los honorarios a Protágoras.

5. El tribunal favorece a Euatlo o a Protágoras pero no a ambos.

Por lo tanto, el tribunal favorece y no favorece a Euatlo y a Protágoras

Ahora bien, los símbolos de lo que nos valdremos serán los siguientes. La propiedad F indica la relación de favorecer que un tribunal t mantiene con otro, sea e (Euatlo) o sea p (Protágoras). G es la propiedad de alguien de ganar un juicio j . O es la propiedad de ser obligatorio. P es la propiedad que tiene alguien de pagar los honorarios a otro.

1. $Fte \rightarrow (Gej \wedge OPep)$

2. $Ftp \rightarrow OPep$

3. $Ftp \rightarrow (\sim Gej \wedge \sim OPep)$

4. $Fte \rightarrow \sim OPep$

5. $(Fte \vee Ftp) \wedge \sim (Fte \wedge Ftp) \quad // \therefore \quad (Fte \wedge \sim Fte) \wedge (Ftp \wedge \sim Ftp)$

6. $(Fte \rightarrow Gej) \wedge (Fte \rightarrow OPep) \quad \text{Distribución (1)}$

7. $Fte \rightarrow OPep \quad \text{Simplificación (6)}$

8. $OPep \rightarrow \sim Fte \quad \text{Transposición (4)}$

9. $Fte \rightarrow \sim Fte \quad \text{Silogismo hipotético (7, 8)}$

10. $\sim Fte \vee \sim Fte$	Def. bicondicional (9)
11. $\sim Fte$	Tautología (10)
12. $(Ftp \rightarrow \sim Gej) \wedge (Ftp \rightarrow \sim OPep)$	Distribución (3)
13. $Ftp \rightarrow \sim OPep$	Simplificación (12)
14. $\sim OPep \rightarrow \sim Ftp$	Transposición (2)
15. $Ftp \rightarrow \sim Ftp$	Silogismo hipotético (13, 14)
16. $\sim Ftp \vee \sim Ftp$	Def. bicondicional (15)
17. $\sim Ftp$	Tautología (16)
18. $Fte \vee Ftp$	Simplificación (5)
19. $\sim (Fte \wedge Ftp)$	Simplificación (5)
20. $\sim Fte \vee \sim Ftp$	De Morgan (19)
21. Fte	Silogismo disyuntivo (17, 18)
22. Ftp	Silogismo disyuntivo (11, 18)
23. $\sim Ftp$	Silogismo disyuntivo (20, 21)
24. $\sim Fte$	Silogismo disyuntivo (20, 22)
25. $Fte \wedge \sim Fte$	Conjunción (21, 24)
26. $Ftp \wedge \sim Ftp$	Conjunción (22, 23)
27. $(Fte \wedge \sim Fte) \wedge (Ftp \wedge \sim Ftp)$	Conjunción (25, 26)

Concluiremos nuestra investigación exponiendo posibles vías de solución de esta paradoja.

3.1. La solución legal-moral

A través de una inspección podemos percatarnos de que el tribunal solo tiene dos opciones: favorecer a Protágoras o favorecer a Euatlo. En esto no hay contradicción porque el fallo del tribunal tiene un rango o jerarquía más elevada que el pacto. Esto quiere decir que, si bien el

razonamiento nos indica lo que sucedería en uno u otro caso, al plantear lo que sucedería, estaríamos ante un adelanto de los hechos, en otras palabras, estaríamos especulando libremente sin considerar que una vez que la ley se establece (o que la justicia se pronuncia) todo es irreversible y los pactos que contradigan la ley deben ser desestimados por ilegítimos. Después del pronunciamiento del tribunal todo pacto queda anulado y *per se* desactivado. En resumen: las leyes tienen una jerarquía más elevada que los pactos éticos.

Bajo este punto de vista, podemos argumentar para defender a Protágoras. Dado que el que está en falta es Euatlo debido a que no ha cumplido un pacto que ha prometido respetar, el tribunal debería favorecer a Protágoras, que vendría a ser el perjudicado. Es decir, las pruebas inculpan al acusado de estarse queriendo pasar de listo. Siendo esto así, el tribunal solo podría favorecer al sofista y existiría una imputación y, por lo tanto, coerción para realizar el pago adeudado. El supuesto problema que asoma es que cuando ocurra este fallo a favor suyo, se generan dos consecuencias: que Euatlo no gane su primer caso y que, por lo tanto, no le deba pagar debido al pacto. Pero esto último no cuenta porque una vez planteado el veredicto, todo pacto anterior queda anulado por una cuestión de jerarquía.

Esta postura, sin embargo, puede ser impugnada para favorecer a Euatlo. Es decir, es posible argumentar moralmente para defender al discípulo pues en el momento en el que Protágoras llevó la causa a los tribunales, Euatlo había cumplido su parte del trato pues no había defendido ni vencido ninguna causa. Por tanto, la denuncia de Protágoras puede entenderse como una artimaña legal para cobrar algo que no se le

adeudaba aún. Ahora bien, si Protágoras reclama el pago de su deuda al haber ganado Euatlo su primer juicio, el juez podría decirle que antes que orar causa alguna y ganarla, Euatlo sólo ha tenido opción de autodefensa ante una treta injusta y no conforme con la razón y las leyes. Así, como Protágoras estaría buscando con malas artes torcer la voluntad libre de su alumno debe perder el juicio.

Incluso, si Protágoras apelara este fallo del tribunal, existen otras posibilidades interesantes que podrían “consolar” de alguna forma el reclamo del sofista. En algunos casos el demandado civil, si recibe el favor del tribunal, también es protegido de los pagos asociados con el acto de ir a juicio. El tribunal, de hecho, podría ordenar que Protágoras, como demandante perdedor, pagara a Euatlo la cantidad que le costó ganar el juicio. A esto se le conoce como *condena de costas y costos*.⁵¹ En este caso, Euatlo pagaría a Protágoras y el dinero le sería devuelto por orden del tribunal. El contrato original se habría cumplido y Euatlo no tendría ninguna obligación adicional de pagar por su instrucción a Protágoras. El resultado para Protágoras sería que habría perdido el caso, recibido el pago de acuerdo al contrato original y, luego, tenido que pagar las pérdidas del litigante por la demanda fallida. En esta misma línea argumentativa, otra manera un poco más astuta de salir del problema es

⁵¹ La orden del pago de costos y costas es una consecuencia accesorio al fallo que se decreta en un proceso judicial, representando una condena al vencido para resarcir los gastos incurridos por el vencedor. Según el Código Procesal Civil, las costas están constituidas por las tasas judiciales, honorarios de los órganos de auxilio judicial y demás gastos judiciales realizados. Mientras que los costos comprenden el honorario del Abogado del vencedor, más un 5% destinado al Colegio de Abogados del Distrito Judicial respectivo. En los procesos de tutela de derechos fundamentales, entre los cuales se encuentra el hábeas data, el artículo 56° del Código Procesal Constitucional (en adelante CPC) establece que, si la sentencia declara fundada la demanda, el juez impondrá al demandado el pago de costos y costas.

considerando la posibilidad de que Euatlo contrate los servicios de otro abogado. Así, él nunca cumpliría la condición 1 y, por ello, no podría ser acusado de haber incumplido un pacto ni sería perjudicado en su ámbito profesional puesto que su defensa estaría a cargo de otro abogado.⁵²

El problema de esta primera solución es que no logra resolver la contradicción entre Protágoras y Euatlo. Según este planteamiento, cualquiera puede ganar pues ambas posiciones son defendibles mediante argumentaciones morales sustentadas. Esto hace que el asunto permanezca ambiguo y sin respuesta. Además, el análisis legal-moral expuesto no respeta las premisas del argumento formalizado al inicio. Lo que sucede es que se introducen sin explicar otros supuestos ajenos al argumento en análisis. Por ejemplo, la postura que defiende a Protágoras supone la proposición de que todo servicio brindado debe ser cancelado; mientras que la postura que defiende a Euatlo supone la proposición de que toda persona debe actuar con voluntad propia. En el caso de la tercera opción, que “favorece” a los dos, se introduce la premisa de que todo demandado que resulte inocente de su proceso debe ser recompensado

⁵² En la historia judicial existe un caso similar al de Protágoras, según cuenta Clark (2009, p. 14). En EEUU en 1946, Jones fue acusado de practicar abortos ilegales. En uno de los abortos, el único testimonio era el de la mujer a la que supuestamente se le había practicado. Según el derecho de Ohio de entonces, si Jones le hubiese practicado el aborto, ella habría sido cómplice del delito y su testimonio, por sí solo, no habría bastado para inculparlo. Al parecer, la acusación adujo que Jones era culpable del aborto, dado que, de no serlo, la mujer no sería cómplice y su testimonio bastaría para condenarlo. Pero la defensa alegó que no se podía demostrar su culpabilidad, porque, si fuera culpable, la mujer sería cómplice y su testimonio no bastaría para condenarlo.

El acusado parece tener razón: o es culpable sin que se pueda demostrar, o es inocente, pues cualquier veredicto de culpabilidad socavaría el fundamento de una sentencia condenatoria. No obstante, Jones fue declarado culpable. En tales casos, se solía alegar que, debido a la presunción de inocencia –uno es inocente hasta que se compruebe lo contrario–, no se consideraba cómplice al testigo. Esto llevaba a la sorprendente situación de que el testimonio era admisible y podía servir para condenar, a pesar de que la condena eliminaba el valor probatorio del testimonio.

por el demandante. Finalmente, se estudia la posibilidad de suponer que Euatlo pueda contratar los servicios de otro abogado defensor para que no pueda él mismo defenderse del pleito entablado por su maestro. Por estos motivos, rechazo esta primera solución.

3.2. La solución de Leibniz

La solución que defendió Leibniz la estampó en su tesis doctoral *Disputatio Inauguralis de Casibus perplexis in Jure* (1666) y esta hacía ver al problema en cuestión como una falsa paradoja ya que su resolución era demasiado fácil. De acuerdo al precursor de la lógica moderna, el tribunal no debería fallar a favor de Protágoras. Si lo hiciera, cometería una injusticia, dado que Euatlo aún no ha ganado ningún caso (ni lo habría ganado después del fallo). Por supuesto, si, como debe ser, falla a favor de Euatlo, el pacto obligaría a Euatlo a pagar, dado que acaba de ganar un caso y, si no paga, Protágoras podrá demandarle otra vez, proceso que, casi con seguridad, ganaría. En esto, Protágoras tendría razón.⁵³

En otras palabras, cuando Euatlo es demandado por Protágoras, él aún no ha ganado su primer juicio. Por ese motivo, el tribunal debe fallar a favor de Euatlo quien no se ve obligado a pagarle a su maestro. En esto no hay contradicción porque si bien uno podría decir: “Bien, entonces Euatlo por fin ganó su primer juicio, entonces debe pagarle a Protágoras según su pacto”; lo cierto es que cuando ocurre la primera

⁵³ La misma solución la expone R. Smullyan (1978, p. 214). El texto de Leibniz aparece en Artosi (2013) y se titula *Leibniz: Logico-Philosophical Puzzles in the Law. Philosophical Questions and Perplexing Cases in the Law*.

demanda y durante todo el primer juicio, Euatlo no ha ganado su primer juicio. Cuando termina el juicio, recién en un momento posterior al juicio Euatlo ganó su primer juicio. Ahora bien, una nueva demanda de Protágoras tampoco es contradictoria. En esta segunda demanda el estado del estudiante ha cambiado: ahora ha ganado un caso. Frente a esto, Euatlo podría argüir que la ley no le obliga a pagar puesto que ha sido absuelto de ese proceso. Sin embargo, habría que recordar que la segunda demanda no incluye el resultado de la primera. Además, al ser anterior al segundo juicio, el tribunal puede decidir libremente en favor de Protágoras quien, finalmente, puede cobrar lo que se le adeudaba.

El problema paradójico asociado al caso de Euatlo y Protágoras surge debido a una hipótesis problemática: la idea de "estados eternos". Según esta hipótesis, el estado de Euatlo como estudiante, y las implicancias del acuerdo con Protágoras, permanecerían inalterados durante todo el tiempo, cubriendo cada juicio futuro en el que Euatlo participe. Esto implicaría que el tribunal debería tener conocimiento absoluto no solo de los casos futuros en los que Euatlo participará, sino también de los resultados de dichos casos, incluso antes de que ocurran. Esto introduce una contradicción lógica, ya que presupone una omnisciencia temporal que no es realista ni aplicable en la práctica.

Para clarificar, consideremos el caso en dos momentos distintos. Supongamos que Euatlo gana el primer juicio en el que participa, evitando pagar a Protágoras, ya que el acuerdo estipula que debe pagar únicamente si pierde un caso. Sin embargo, si Euatlo pierde un segundo caso en el futuro, Protágoras tendría entonces el derecho de exigir el pago, ya que el acuerdo habría sido finalmente cumplido. Este escenario

evita cualquier contradicción lógica y muestra que el supuesto de "estados eternos" no se aplica aquí, porque cada juicio ocurre en momentos diferentes y con condiciones distintas.

Un ejemplo cotidiano puede ayudar a entender esto. Imagine que un maestro dice a un estudiante: "Te devolveré tu cuaderno cuando termines todos tus deberes". Si el estudiante entrega un deber hoy, el maestro puede devolverle el cuaderno para ese deber, pero aún puede esperar que entregue futuros deberes. El acuerdo no implica que todo ocurra al mismo tiempo ni que las condiciones sean eternas. Similarmente, en el caso de Euatlo, el cumplimiento del acuerdo depende de los eventos específicos y secuenciales, no de un supuesto estático que abarque toda su vida de manera uniforme.

3.3. La solución interpretativa

Saúl Kripke, en *"Outline of a Theory of Truth"*, presenta una teoría semántica acerca del significado y funcionamiento del predicado de verdad. Para ello se sirve del aparato formal de la Teoría de Puntos Fijos. De acuerdo a esta teoría, un lenguaje de punto fijo es aquél que puede contener su propio predicado de verdad. Dicho lenguaje puede construirse siguiendo los lineamientos del proceso de aprendizaje de un principiante que está capacitándose para hacer uso del predicado veritativo. Si quisiéramos enseñarle a este novato cómo funciona el predicado de verdad (o falsedad) le explicaríamos que uno está inclinado a afirmar (o negar) que una oración es verdadera, cuando está inclinado a afirmar (o negar) la oración misma. De este modo, si está dispuesto a afirmar

(1): “La nieve es blanca”;

también estará dispuesto a afirmar

(2): “(1) es verdadera”.

Posteriormente, si ha afirmado (2), también estará dispuesto a afirmar

(3): “(2) es verdadera”.

Y así sucesivamente. Según Kripke:

(...) De este modo, el sujeto será capaz eventualmente de atribuir la verdad a más y más enunciados que contienen la noción misma de verdad. No hay ninguna razón para suponer que todos los enunciados que contienen “verdadero” habrán de decidirse de esta manera, pero la mayor parte se decidirán. (...) (1997, pp. 111-112)

Al primer punto fijo, Kripke lo denomina propiamente *punto fijo mínimo*. Observemos que la teoría está en condiciones de dar cuenta de la noción de *fundamentación*: una oración está fundada si adquiere un valor de verdad en algún nivel del proceso de construcción del punto fijo mínimo. En otras palabras, decimos que una oración está fundada siempre y cuando su valor de verdad pueda ser determinado en última instancia a partir de cuestiones empíricas. En caso contrario, decimos que dicha oración está infundada.

Kripke introduce los *puntos fijos intrínsecos* como aquellos que asignan valor de verdad verdadero a oraciones infundadas que no pueden ser falsas y, a la vez, valor de verdad falso a las que no pueden ser verdaderas. Estos puntos (o interpretaciones) no hacen asignaciones arbitrarias de verdad que entre en conflicto con otras asignaciones de verdad. Por ejemplo, oraciones, tales como

(a): No es cierto que (a) y su negación sean verdaderas;

son infundadas, pero verdaderas en todo punto fijo en el que tienen un valor de verdad.

Kripke llama *puntos fijos maximales* o *máximos* a los que otorgan, consistentemente, tantos valores de verdad como es posible a oraciones infundadas que pueden ser verdaderas o falsas para las cuales existe una asignación de valores de verdad consistente. De acuerdo a Kripke:

Desde hace mucho tiempo se ha reconocido que parte del problema intuitivo que tenemos con oraciones del tipo del Mentiroso también se encuentra en oraciones como:

(3): (3) es verdadera

las cuales, aunque no son paradójicas, tampoco dan lugar a condiciones de verdad determinadas. (...) Las oraciones como (3), aunque no son paradójicas, son infundadas. (...) (1997, pp. 114-115)

El punto fijo máximo nos permite trazar la distinción entre aquellas oraciones paradójicas y aquellas meramente infundadas. La oración “Esta oración es verdadera” puede ser consistentemente verdadera o falsa, y conserva el mismo valor a lo largo de todo el proceso de construcción del punto fijo, aunque la decisión por uno u otro valor es arbitraria. Sin embargo, no podemos hacer lo mismo con *El Mentiroso*, porque en cuanto le adscribimos un valor definitivo, éste fluctúa constantemente entre verdad y falsedad. Ahora, volveremos al análisis de la paradoja protagórica.

Una posible vía para resolver esta paradoja consiste en compararla con la de *El Mentiroso*. La paradoja del *El Mentiroso* tiene una versión llamada la *paradoja de Jourdain* que reproducimos a continuación:

- 1) La oración 2 es falsa.
- 2) La oración 1 es verdadera.

Razonemos este caso.

I) si (1) es verdadera, entonces (2) es falsa; pero

II) si (2) es falsa, entonces (1) es falsa

Con esto tenemos que si (1) es verdad, entonces (1) es falso, lo cual constituye una clara contradicción. También puede deducirse que si (1) es falso, entonces (1) es verdadero. Uniendo ambos resultados tenemos que (1) es verdad si y solo (2) es falso.

Análogamente, según Carlos Pino León (2003), la paradoja de Protágoras puede interpretarse como el sistema de oraciones siguiente:

(1) Euatlo dice: “Lo que dice Protágoras es falso”.

(2) Protágoras dice: “Lo que dice Euatlo es falso”.

Esta manera de entender la paradoja es correcta en tanto se considera que Protágoras exige que Euatlo le pague, mientras que Euatlo se niega a hacerlo. Habiendo por ambas partes sendas argumentaciones lógicas que prueban su pedido, se concluye que los dos están en un desacuerdo: uno dice “p” y el otro dice “ $\sim p$ ”. Por ende, ellos se están diciendo entre sí que cada uno está mintiendo. Hay que decir que, si bien los dos contrincantes se encuentran en un desacuerdo, su desacuerdo no es extremo ni radical pues ellos se encuentran de acuerdo en algunas cosas básicas. Por ejemplo: la relación profesor-alumno, el pacto celebrado, la demanda planteada, el respecto a las leyes jurídicas por parte de ambos, etc. Por este motivo, a pesar de la discrepancia, es posible que ambos puedan establecer un diálogo que supone algunas ideas básicas y respetadas por ambos.

Así, bajo este punto de vista, no hay paradoja pues no hay contradicción ya que

I) si (1) es verdad, entonces (2) es falso; pero

II) si (2) es falso, entonces (1) es verdad

Es decir, solo se llega demostrar que si (1) es verdad, entonces (1) es verdad, lo cual no constituye contradicción como sí sucedía en el caso de *El Mentiroso*. Por otro lado, también se obtiene que si (1) es falso, entonces (1) es falso. Este sistema de oraciones, de acuerdo a Kripke, se denomina infundado, pero no paradójico pues no alberga contradicción. Es decir, la paradoja de Protágoras interpretada como un tipo de sistema de oraciones constituye un sistema de oraciones con punto fijo máximo.

3.4. La disolución analítica

Desde este punto de vista la paradoja no se resuelve, sino que se disuelve. Para ello, es necesario estudiar la paradoja de *El Mentiroso*. La versión más difundida de dicha paradoja se construye sobre un lenguaje autorreferencial: “Alguna persona dice “Lo que digo ahora es falso” ¿Es falso o verdadero lo dicho por él?”. Resulta sumamente sencillo demostrar que lo dicho por ese alguien es tanto falso como verdadero. Supongamos que A es la proposición “Yo miento”. Ahora bien, si es verdad que yo miento, entonces hago afirmaciones falsas y, como yo digo A, entonces A es falsa. Pero si es falso que miento, entonces hago afirmaciones verdaderas y, como yo digo A, entonces A es verdadera. Notamos que esta oración, cuya verdad implica su falsedad y cuya falsedad implica su verdad, cumple con el requisito indispensable para

ser considerada una paradoja lógica según la definición que aparece en el glosario de Piscoya (1995b, p. 205).

Para solucionar este problema Tarski, antes de anular la validez de las leyes lógicas en el lenguaje natural, prefiere dividir dicho lenguaje en dos niveles: lenguaje objeto y metalenguaje. Como ya se indicó antes el metalenguaje posee una riqueza esencial con respecto al lenguaje objeto lo cual evita que las oraciones que se refieran a sí mismas (como el Mentiroso) o a otras se confundan con las oraciones que no hablan sobre sí mismas. Para resolver la paradoja del Mentiroso, se introduce una distinción fundamental entre niveles de lenguaje. La idea es que las oraciones que hablan sobre la verdad de otras oraciones deben pertenecer a un nivel superior, denominado metalenguaje. Esto evita que una proposición pueda predicar su propia verdad o falsedad dentro del mismo nivel de lenguaje, lo que es el origen de la paradoja. Veamos cómo funciona esta solución con un ejemplo.

Supongamos que tenemos la proposición A: "Yo miento". Según la propuesta de Tarski, debemos reformularla para incluir la referencia al nivel de lenguaje. A se transforma entonces en "Yo miento-en-L1", pero esta proposición pertenece al metalenguaje L2. Ahora, si afirmamos que A es verdadera, estaríamos diciendo que "Yo miento-en-L1" es verdadero en L2. Esto implica que las afirmaciones hechas en L1 serían falsas, pero como A está en L2, no afecta directamente la verdad o falsedad de A dentro de L2. De manera similar, si decimos que A es falsa, esto significaría que "Yo miento-en-L1" es falso en L2, indicando que las afirmaciones hechas en L1 serían verdaderas, sin que esto implique directamente la falsedad de A en L2.

Por ejemplo, pensemos en un caso cotidiano. Imagina un cartel en un parque (L1) que dice: "Este cartel es falso". Si tratamos de evaluar la verdad de esa afirmación dentro del mismo nivel de lenguaje, caemos en la paradoja: si es verdadero, entonces es falso, y si es falso, entonces es verdadero. Sin embargo, si movemos la evaluación al metalenguaje (L2), podemos analizar la afirmación desde una perspectiva superior, diciendo algo como: "El cartel en L1 dice algo falso". Ahora, la afirmación en L2 no se ve afectada por las contradicciones de L1, y la paradoja se disuelve.

Para resolver la paradoja entre Protágoras y Euatlo, debemos analizar cuidadosamente el pacto que ambos establecieron. El acuerdo consistía en lo siguiente: Protágoras enseñaría oratoria a Euatlo a cambio de un pago dividido en dos partes. La primera mitad sería entregada por adelantado, mientras que la segunda sería pagada una vez que Euatlo ganara su primer caso en un tribunal. Este acuerdo aparentemente claro genera una paradoja cuando lo analizamos en el contexto de una disputa legal.

La clave para entender el problema está en notar que ganar un juicio y pagar la deuda no se encuentran en el mismo nivel lógico. Ganar un juicio implica acatar la sentencia del juez, que podría incluir, paradójicamente, la decisión de no pagar la deuda. Por ejemplo, si Euatlo lleva a Protágoras a juicio y gana, la sentencia podría declarar que no está obligado a pagar, lo que contradice el pacto inicial. Este desajuste surge porque la relación entre ganar un juicio y pagar la deuda introduce un deslizamiento entre niveles: el acto de ganar un caso legal pertenece a un nivel superior al acto de efectuar un pago, ya que ganar un juicio depende de una sentencia dictada por una autoridad judicial.

Para evitar esta contradicción, podemos reinterpretar el pacto de dos maneras. Una opción es establecer que el cumplimiento de la sentencia judicial debe ser compatible con el contrato original, es decir, que ninguna sentencia puede anular la obligación de pagar la deuda. Por ejemplo, el juez podría dictar que Euatlo ha ganado el caso pero que, según el pacto, aún debe cumplir con el pago. Otra posibilidad es señalar que el compromiso de pagar la deuda forma parte de un contrato previo e independiente de cualquier sentencia judicial. Esto significa que el pago no está condicionado a la interpretación del resultado del juicio, sino al simple hecho de haber recibido la enseñanza.

Además, un problema subyacente es que el contrato entre Protágoras y Euatlo no especifica un plazo concreto para el pago de la deuda. Esto introduce ambigüedad, ya que sin un límite temporal definido, Euatlo podría retrasar indefinidamente el pago alegando que aún no ha ganado un juicio. Por ejemplo, si Protágoras demandara a Euatlo por el incumplimiento del pago, el juicio mismo se convertiría en el "primer caso" de Euatlo, generando un bucle lógico: si Euatlo gana, podría argumentar que aún no ha cumplido la condición de ganar un caso, porque el juicio en cuestión es sobre el pago de la deuda.

3.5. La solución de Rescher

Para Nicholas Rescher (2001, pp. 63-65), la paradoja que surge en este caso se relaciona con el siguiente par problemático:

- (I) El veredicto del tribunal debe estar de acuerdo con lo que estipula el contrato. Sin embargo,

(II) En las circunstancias especificadas, el contrato y el veredicto del tribunal van a estar en desacuerdo de la siguiente manera:

El veredicto de la corte	Ganador del caso	El contrato especifica
Un pago es debido	Protágoras	Un pago no es debido
Un pago no es debido	Euatlo	Un pago es debido

Así, no existe la posibilidad de que el veredicto de la corte esté de acuerdo con las especificaciones del contrato.

Para resolver esta paradoja, Rescher propone abandonar la premisa de que el veredicto debe siempre ajustarse al contrato, ya que este genera una contradicción intrínseca. Según el principio jurídico *conventum absurdum non est conventum* (un contrato absurdo no es válido), el contrato pierde su fuerza si crea una situación irresoluble. Además, el juez, obligado por el principio de *non liquet*⁵⁴ a dictar sentencia, puede optar por una solución equitativa: dividir la cantidad en disputa en partes iguales. Esto preserva el principio de justicia al tratar de manera similar a ambas partes, cuyos argumentos son igualmente válidos.

Este enfoque refleja cómo las leyes deben adaptarse para resolver situaciones paradójicas. La división equitativa de la deuda entre

⁵⁴ En latín “non liquet” significa “no está claro”. La prohibición *non liquet* alude al hecho de que no es posible que un órgano jurisdiccional no pueda responder a una cuestión controvertida por no encontrar solución para el caso, o bien por no haber norma directamente aplicable. En la mayoría de los ordenamientos jurídicos actuales se prohíbe que el juez se niegue a dar solución al caso que se le plantea. Para esto, se parte del dogma de que el ordenamiento jurídico es pleno, por lo que, utilizando las herramientas interpretativas adecuadas, el juzgador siempre puede encontrar una solución.

Protágoras y Euatlo no elimina completamente la paradoja, pero minimiza sus efectos, garantizando una resolución práctica y justa que respeta los principios legales fundamentales.

CUESTIONARIO # 3

1. ¿Qué característica define al relativismo de Protágoras?

- a) La existencia de verdades absolutas.
- b) Que el hombre es la medida de todas las cosas.
- c) La negación de cualquier verdad.

2. ¿Qué dilema surge en la paradoja de Protágoras?

- a) Contradicciones en la definición de infinito.
- b) Si un estudiante debe pagar a su maestro.
- c) Si un puente debe permitir el paso.

3. ¿Qué solución propone Leibniz para la paradoja de Protágoras?

- a) Desechar dicha paradoja por ser imposible.
- b) Acudir a la moral de sentido común.
- c) Realizar un segundo juicio.

4. ¿Qué tipo de lógica no clásica puede usarse para formalizar la paradoja de Protágoras?

- a) Lógica deóntica.
- b) Lógica paraconsistente.
- c) Lógica cuántica.

5. A esas argumentaciones opuestas entre sí que fueron analizadas por Protágoras se le conoce como

- a) paradojas.
- b) sofismas.
- c) antilogías

6. ¿Con qué otra paradoja guarda relación la paradoja de Protágoras?

- a) La de Russell.
- b) La del puente.
- c) La de Cantor.

7. ¿Qué implica la disolución analítica de la paradoja?

- a) Distinguir entre lenguaje y metalenguaje.
- b) Proponer un sistema lógico alternativo.
- c) Negar las premisas originales.

8. ¿Qué sugiere Rescher al respecto de la paradoja de Protágoras?

- a) Propone rechazar que el veredicto deba ajustarse al contrato.
- b) Usa el axioma de separación de la teoría de conjuntos.
- c) Sugiere ser más respetuosos con los maestros.

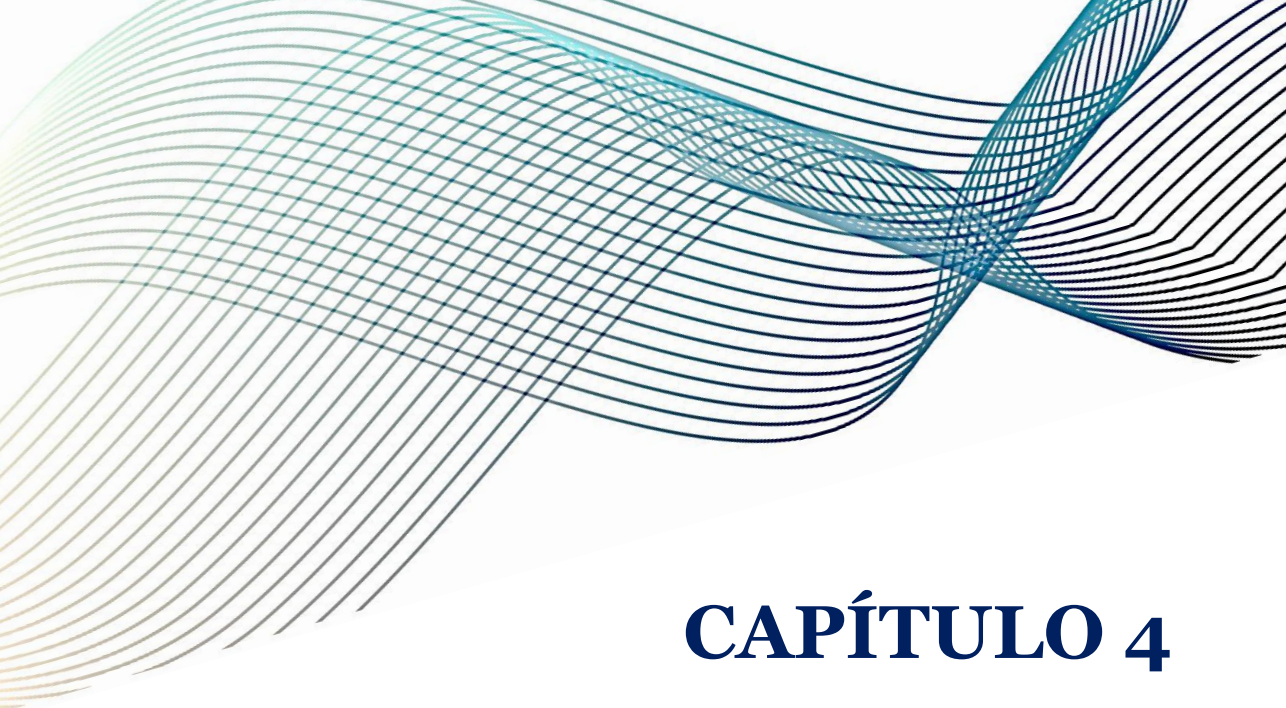
9. ¿Cuál es el objetivo del análisis lógico de la paradoja de Protágoras?

- a) Estructurar los argumentos involucrados en tal paradoja.
- b) Mostrar los límites del relativismo cultural.
- c) Probar la existencia de verdades universales.

10. ¿Qué sugiere la solución interpretativa?

- a) Usar sistemas de oraciones.
- b) Buscar evidencias históricas.
- c) Interpretar en base a textos antiguos.

Solucionario: 1b, 2b, 3c, 4a, 5c, 6b, 7a, 8a, 9a, 10a.



CAPÍTULO 4

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA COMO UNA FALACIA

Resumen: En este trabajo analizo la paradoja de Aquiles y la tortuga. Para ello, comienzo por la definición de ‘falacia’ y ‘paradoja’ y, además, expongo la clasificación de las paradojas establecida por Quine. Enseguida, presento la paradoja de Zenón y luego muestro una manera de resolverla usando matemática básica. Esta solución permite sostener que la supuesta paradoja solo era una falacia. En la parte final del presente artículo muestro que la mencionada paradoja era un caso muy especial de la falacia de la continuidad.

1. Falacia

Falacia deriva del latín *fallacia-ae*, que quiere decir engaño, fraude, superchería, mentira con la que se intenta dañar a alguien. En efecto, las falacias nos engañan, haciéndonos admitir como válidos razonamientos que no lo son. En definitiva, las falacias son razonamientos *psicológicamente persuasivos*, pero *lógicamente defectuosos*. A pesar de que un simple error visible sería detectado de inmediato, sin embargo, estos logran convencer a la audiencia a la que están dirigidos porque sus errores se hallan revestidos de una apariencia de corrección.

En el lenguaje coloquial el término *falacia* se emplea a menudo con poco rigor para designar cualquier idea equivocada, creencia falsa o conocimiento erróneo. Enseguida, mostramos algunos ejemplos:

- 1) Todos los judíos son avaros.
- 2) Ninguna mujer es infiel.
- 3) Todos los africanos son negros.
- 4) Todo mirafiorino es pudiente.
- 5) Todos los hombres son iguales.
- 6) Todos los argentinos son soberbios.
- 7) Todos los homosexuales tienen sida.
- 8) Ningún obrero es capitalista.
- 9) Todas las aves pueden volar.
- 10) Todos los políticos son corruptos.

Estas instancias serán llamadas *expresiones falaces* porque aluden a proposiciones falsas. Pero esto es también un uso impropio. Por ejemplo, si alguien dice que “Paolo se escapó de su colegio” cuando en

realidad Paolo estuvo en su colegio, entonces Paolo podrá acusarlo de estar diciendo falacias porque está expresando falsedades sobre él.

En un sentido más estricto o más técnico los lógicos usan el término *falacia* como denotando algún error en un razonamiento. De ahí que para que haya falacia es menester que haya algún razonamiento, aunque sea en el sentido de “aparente”.

Una falacia es un tipo de razonamiento incorrecto. Pero no todo razonamiento incorrecto es una falacia. Algunos razonamientos son tan obviamente incorrectos que no engañan a nadie. Por ejemplo:

P.1) Algunos docentes son licenciados.

C) Por lo tanto, todos los docentes son licenciados.

es un razonamiento incorrecto, pero no es una falacia.

En lógica se acostumbra reservar el nombre de *falacia* a aquellos razonamientos que, aunque *lógicamente* incorrectos, son *psicológicamente* persuasivos. Por ello, una falacia es un tipo de razonamiento incorrecto que se presenta como si fuera correcto, pero resulta no serlo cuando se lo analiza cuidadosamente. Por ejemplo:

P.1) Las sociedades están compuestas de individuos.

P.2) Los objetivos de los individuos son siempre, en última instancia, egoístas.

C) Por lo tanto, ninguna sociedad puede tener objetivos altruistas.

P.1) Mario ha estado involucrado en casos de corrupción.

C) Por ende, la propuesta de Mario para controlar la violencia en el fútbol no es la mejor.

P.1) Los seres humanos gritan y sienten dolor cuando se los golpea.

P.2) Las máquinas expendedoras hacen ruido cuando se golpean.

C) En conclusión, las máquinas expendedoras sienten dolor cuando se las golpea.

En el primer caso, se comete la falacia de creer que las propiedades de los componentes de las partes determinan una propiedad de todo un compuesto (falacia de *composición*). En el segundo caso, la falacia estriba en desacreditar la propuesta de Mario solo porque él ha estado involucrado en la corrupción (falacia *ad hominem*). En este caso, aunque sea cierto que Mario haya colaborado (consciente o inconscientemente, directa o indirectamente) con la degeneración de la política de su país, su propuesta puede ser tomada en cuenta si es que logra frenar las incidencias de violencia en las calles de la ciudad. En el tercer caso, se busca asociar mediante una analogía que lo que le afecta al ser humano también le afecta a una máquina (falacia de *falsa analogía*).

Todas estas ejemplificaciones representan falacias que buscan derivar una conclusión sin respetar la relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión. En palabras de García Damborenea:

(...) A todas las formas de argumentación que encierran errores o persiguen fines espurios, los llamamos **falacias**. El término procede del latín *fallacia*, que significa engaño, y lo empleamos como sinónimo de *sofisma*, palabra que acuñaron los griegos para designar el argumento engañoso.

Ya se ve que la terminología es imprecisa porque mezcla errores de razonamiento (...), con maniobras extra-argumentales (...), e incluye también los falsos argumentos que se emplean con la intención de engañar o desviar la atención (...). Todos tienen una cosa en común: adoptan la apariencia de un argumento e inducen

a aceptar una proposición que no está debidamente justificada. Unas veces nos engaña nuestro juicio y otras las mañas de nuestro interlocutor. (2000, p. 123)

En otras palabras, un buen argumento, por lo general, establece la verdad de su conclusión. Si no lo logra, pero aun así se expone ante el público oyente para convencerlo se convertirá en una falacia. Este mal argumento puede fallar de dos maneras:

(...) La primera es suponer alguna proposición falsa como una de las premisas del argumento. (...)

La segunda forma en que el argumento puede fracasar (...) es que sus premisas no (...) impliquen [la conclusión]. Aquí nos hallaremos en la región específica del lógico, cuyo interés principal es el de las relaciones lógicas entre las premisas y la conclusión. Un argumento cuyas premisas no implican su conclusión es un argumento cuya conclusión *puede* ser falsa *aun* si todas sus premisas fuesen verdaderas. (...) (Copi y Cohen, 2009, pp. 125-126)

2. Paradoja

El término “paradoja” viene del griego *παράδοξος* – *ον*. Como sustantivo, significa etimológicamente: más allá o contrario o al margen de la opinión (Blánquez, 1985, p. 1097), o a lo convencionalmente aceptado. Asimismo, siguiendo a Ferrater Mora (1994, p. 2693), la paradoja es “(...) un acontecimiento que parece asombroso que pueda ser tal como se dice que es (...)”. Como adjetivo, la palabra *paradójico* (*a*)

funciona como sinónima de “inesperado, increíble, extraño, maravilloso, raro, singular y extraordinario” (Pabón, 1997, p. 450).

Coloquialmente, el término “paradoja” designa a aquella sentencia inverosímil, increíble y/o contradictoria que va en contra de lo común, que es opuesta a lo que se cree, que se opone a lo que se toma por verdadero. Así, las paradojas, en tanto sentencias, son expresiones breves que encierran contradicción o generan sorpresa por lo absurdo de su contenido.

- 1) Todos somos iguales, pero unos más iguales que otros.
- 2) Si quieres paz, prepárate para la guerra.
- 3) No hay mal que por bien no venga.
- 4) El hombre es como el oso mientras más feo, más hermoso.
- 5) Me da pena ser tan cruel.
- 6) Es de mala suerte ser supersticioso.
- 7) Está prohibido prohibir.
- 8) Soy ateo gracias a Dios.
- 9) Toda regla tiene excepciones.
- 10) En mi debilidad está mi fortaleza.

En sentido técnico, las paradojas son tipos especiales de contradicción, aquella dada por una oración cuya verdad implica su falsedad, del mismo modo que su falsedad implica su verdad. Por este singular rasgo es que es plausible señalar que la paradoja asombra, toda vez que nos enfrenta a la formulación de un enunciado absurdo, en relación con el cual extrañamente parece no ser posible señalar la causa que explique por qué adopta dicha forma. Esta definición funciona para

el caso de la paradoja de *El Mentiroso*. Examinemos dicha paradoja: supongamos que existe una oración que afirma de sí misma que es falsa.

Hipótesis:

(1) *La oración (1) es falsa.*

Problema: ¿es verdadera o es falsa la oración (1)?

Por un lado, si (1) es verdadera, entonces se cumple lo que dice. Pero, si lo que dice se cumple, entonces (1) es falsa. Es decir, si (1) es verdadera, entonces (1) es falsa.

Por otro lado, si (1) es falsa, entonces lo que dice dicha oración se confirmaría. Pero, si se confirma lo dicho por esa oración, entonces (1) es verdadera. Es decir, si (1) es falsa, entonces (1) es verdadera.

Hay que decir que, en contraposición con el sentido coloquial de la paradoja que la define como la sentencia inverosímil, increíble y contradictoria que va en contra de lo común, al definir técnicamente una paradoja como aquel ente lingüístico cuya verdad implica su verdad y viceversa; se está considerando a la paradoja desde el aspecto del proceso racional que la genera.

Así, es el razonamiento, como aquel proceso de la inferencia que pone en juego reglas lógicas, el elemento principal que permite identificar a la paradoja. En esta línea de pensamiento, Jonathan Vogel define a la paradoja sosteniendo que es un argumento de premisas aceptables, pero con una conclusión inaceptable (Dancy y Sosa, 1992, p. 324). Esta será la definición de paradoja en sentido técnico que acogeremos. Veamos un caso para notar cómo se aplica esta definición. Por ejemplo, las premisas aceptables de la paradoja de *El Mentiroso* serían:

- 1) Todo enunciado que tiene significado es verdadero o falso.
- 2) La oración que dice de sí misma que es falsa tiene significado.

y, la conclusión inaceptable sería:

C) Si la oración que dice de sí misma que es falsa, es verdadera entonces dicha oración es falsa, y si dicha oración es falsa, entonces ella misma sería verdadera.

Michael Clark en “El gran libro de las paradojas” (2009) sostiene que, a decir de Mark Sainsbury, una paradoja es un argumento en el que una conclusión aparentemente inaceptable se deriva, mediante un razonamiento aparentemente aceptable, a partir de premisas también aparentemente aceptables. Algo semejante dice Roger Scruton (2003) cuando afirma que una paradoja es un argumento que conduce por etapas racionales a una contradicción a partir de premisas intuitivamente aceptables.⁵⁵ También, según Alberto Clemente de la Torre en *Física Cuántica para filósofos*: “(...) la palabra [paradoja] [implica] (...) llegar a una conclusión evidentemente falsa o absurda por un razonamiento aparentemente correcto (...)” (2000, p. 98). Más específicamente, de acuerdo con Piotr Łukowski (2011), en una paradoja concurren tres cosas:

- 1.- Se han utilizado correctamente las reglas de la inferencia.
- 2.- Se ha formulado adecuadamente el razonamiento.

⁵⁵ Pero no podemos decir que se dé una paradoja siempre que haya argumentos a favor de conclusiones incompatibles, pues, de lo contrario, todo asunto controvertido adquiriría carácter paradójico. Lo característico de tales paradojas es el hecho de que los argumentos divergentes son simétricos (es decir, se da tanto $p \rightarrow q$, como $q \rightarrow p$), lo que hace que la oposición resulte especialmente desconcertante.

3.- Hay la certeza de que nuestras opiniones son, hasta el momento, racionales.

Y sucede que, a pesar de lo anterior, se llega a una contradicción. Por lo tanto, la paradoja es un argumento legalmente correcto que, sin embargo, deviene en una contradicción.

Así, por medio de la estructura de explicación que se suele usar para poder exponer el significado del término *falacia*⁵⁶, podemos también proporcionar una manera de comprender al vocablo *paradoja*. Consideramos que esto es posible porque ambos tipos de conceptos son de índole lógica. Así pues, una primera nota que señalaremos es que comparten la singularidad de presentarse como tipos especiales de argumentos⁵⁷. Mientras que las falacias son razonamientos que, aunque psicológicamente persuasivos, presentan defectos desde el punto de vista lógico, las paradojas pueden entenderse como razonamientos que, aunque lógicamente coherentes, resultan contraintuitivos o psicológicamente desconcertantes, porque, si bien en una paradoja se procede con rigor lógico, sin embargo, se llega a resultados que son: o bien, absurdos (según la creencia común); o bien, contradictorios

⁵⁶ Como aparece en el texto *Elementos de Lógica* de Óscar García (2012c, pp. 28-43). García Zárate procede a explicar el significado del término *falacia* siguiendo una estrategia de cuatro pasos:

- 1) Distingue entre falacia y otros términos asociados con esta.
- 2) Indica el sentido coloquial del mismo y, enseguida, su sentido técnico.
- 3) Señala la importancia de su estudio.
- 4) Clasifica las mismas en base a ciertos criterios.

⁵⁷ Un argumento es un tipo de discurso cuya estructura asocia dos elementos básicos:

- 1) El conjunto de las premisas (que pueden ser una o más de una)
- 2) El conjunto de la conclusión (que es única)

Un argumento puede ser, entre otras cosas, válido (cuando conserva la relación de consecuencia lógica) o inválido (cuando no la conserva).

(atentando así contra un principio lógico clásico).⁵⁸ Asimismo, como segundo aspecto que tienen en común ambos conceptos podemos decir que mientras que la falacia puede ser explicada tanto en un sentido coloquial (creencia extendida aunque falsa) como en un sentido técnico (razonamiento que pretende persuadir sobre alguna cuestión y que oculta algún error); igualmente, una paradoja también se puede explicar en un sentido coloquial (sentencia inverosímil, increíble y/o contradictoria) y en un sentido técnico (argumento de premisas aceptables pero con una conclusión inaceptable). Continuando con las similitudes, en tercer lugar, sostenemos que mientras que la falacia suele estar asociada a los términos *paralogismo* y *sofisma*; la paradoja comúnmente se le vincula a los términos *aporía* y *antinomía*. Finalmente, la conocida clasificación de las falacias en: atingentes y ambiguas; puede ser vista como semejante a la clasificación de las paradojas en: semánticas y lógicas.

2. Clasificación de las paradojas de Quine

W. V. O. Quine en *The Ways of Paradox* (1976) en base a la definición técnica de paradoja que hemos proporcionado (es decir, un argumento de premisas aceptables, pero con una conclusión inaceptable) nos propone una división de las paradojas en: *verídicas*, *falsídicas* y *antinomias*; con el fin de distinguir algunos detalles que tienen varios casos específicos de paradojas.

Quine habla de ‘paradojas verídicas’ -en la cuales lo que se

⁵⁸ En otras palabras, mientras que la falacia es un argumento en el que la relación de consecuencia lógica no tiene éxito, la paradoja es un argumento en el que, si bien hay consecuencia lógica, no obstante, exhibe inconsistencia, es decir, contradicción lógica.

pretende establecer es verdadero- y de ‘paradojas falsídicas’ –en las cuales lo que se pretende establecer es falso-. Los términos ‘verídico’ y ‘falsídico’ provienen del latín *veridicus* y *falsidicus* y atribuyen verdad (realidad) o falsedad (ilusión) a los sustantivos que califican. Estos términos tienen cierta relación con el concepto de validez lógica.

Según Quine, aquellas paradojas en las que la presuposición de la existencia de ciertas entidades conduce a una contradicción serán denominadas *paradojas verídicas*, puesto que este tipo de paradojas se presentan cuando la afirmación que nos resulta inicialmente absurda, notamos luego que es verdadera, al comprender el razonamiento que la justifica. En algunos casos, la paradoja verídica se constituye como una reducción al absurdo que al tener la forma lógica: $P \rightarrow (Q \wedge \sim Q)$ culmina en $\sim P$. Revisemos el caso de la paradoja de Galileo.

La paradoja de Galileo, planteada en sus *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* Galileo (1945, pp. 57-59) sostiene la aparente falta de consistencia en la relación entre números naturales y números cuadrados. Da la impresión de que hay más números enteros (1,2,3,...) que cuadrados de dichos números (1,4,9,...). Pero es posible emparejar los números enteros con sus cuadrados:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	25	36	49	64	...

Sin embargo, si consideramos que los cuadrados son parte de los naturales y que el todo es siempre mayor que la parte, entonces podemos concluir que los naturales serán más que los cuadrados. No obstante,

podemos darnos cuenta de que ambos tipos de número son infinitos (en la misma medida). Así, llegamos a la idea de que la parte es igual que el todo, lo cual es contradictorio con nuestro sentido común. Sin embargo, hay que notar que la relación entre estos dos conjuntos de números nada tiene de aparente o engañosa puesto que, en verdad, dichos conjuntos son igual de numerosos, es decir, tienen la misma cantidad de elementos. Esto último se puede probar utilizando algunas herramientas básicas de la teoría de conjuntos, específicamente, la relación de correspondencia biunívoca.

Otros ejemplos de paradojas verídicas están constituidos por la familia argumental de paradojas de Russell y estas son: la paradoja del barbero, la paradoja del alcalde y la del catálogo. Todas estas son versiones populares de la conocida paradoja de Russell. Otras veces, nuestras sospechas están totalmente fundadas y esa alerta de que alguna mala información se ha dejado filtrar no debe ser descartada, sino que tenemos todo el derecho de iniciar una investigación que nos permita estar seguros de que teníamos razón al atribuirle toda la responsabilidad a tal o cual premisa o regla deductiva. Ya Quine bautizó esta última situación con el nombre de *paradoja falsídica*, puesto que se trata de un razonamiento que no solo aparenta ser falaz, sino que lo es. Notemos que este tipo de paradojas falsídicas se constituirán como argumentos incorrectos que, además, pretenderán tener la apariencia de ser válidos. En resumen, la paradoja falsídica es un argumento inválido del cual se concluyen sólo cosas falsas (Ferrater Mora, 1994, p. 2693). Por ejemplo, en 1847, Augustus De Morgan publica su texto *Lógica Formal o el cálculo de inferencia* y demuestra que $2=1$, pero asumiendo que es posible la

división por cero. A este tipo de paradojas en las que algo extraño se sostiene por una falsa demostración se le conoce como paradoja falsídica.

Finalmente, tenemos a la antinomia. Esta presenta tal contradicción interna que, por un lado, tiene una conclusión inaceptable, pero, por el otro, somos incapaces de descubrir en dónde se halla el error. La presencia de *antinomias* nos obliga a cambiar nuestros esquemas conceptuales, principios lógicos y axiomas. Dentro de esta clasificación, la antinomia es la que representa un verdadero desafío al intelecto humano. Como ejemplos de antinomias podemos mencionar a las paradojas de *El Mentiroso*, de Grelling ⁵⁹ y de Russell ⁶⁰.

⁵⁹ La paradoja de Grelling registrada en el trabajo de Leonard Nelson y Kurt Grelling, “*Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*”, y también en “*Teoría de Conjuntos*” del mismo Grelling (1943, pp. 115-116) es también conocida como la ‘paradoja de los términos heterológicos’. Según ella, muchas expresiones del lenguaje corriente pueden dividirse en autológicas y heterológicas. Expresiones autológicas son las que se refieren a sí mismas, esto es, expresiones de la forma: ‘*t*’ es *t*. Ejemplos de ellas en español son: ‘breve’ (que es breve); ‘escrito en español’ (que está escrito en español); ‘impreso en negro’ (que está impreso en negro); ‘consta de cuatro palabras’ (que consta de cuatro palabras). Expresiones heterológicas son las que no se refieren a sí mismas, esto es expresiones de la forma: ‘*t*’ no es *t*. Ejemplos de ellas son: ‘escrito en francés’ (que no está escrito en francés); ‘impreso en rojo’ (que no está impreso en rojo); ‘consta de dos palabras’ (que no consta de dos palabras). En medio de estas expresiones, el problema que se plantea es el siguiente: ¿El término ‘heterológico’ es heterológico o autológico?

⁶⁰ La clásica paradoja de Bertrand Russell de la Teoría Lógica de las Clases fue descubierta por Zermelo en 1900 y un año más tarde, redescubierta independientemente, por Russell, quien la publicó. Se ha solido considerarla como una paradoja de la Teoría de Conjuntos debido a la confusión del concepto de conjunto con el concepto fregeano de clase (o extensión de un concepto). La fundamentación lógica de la Aritmética por Frege se basaba en el supuesto de que para cada propiedad o condición $\varphi(x)$, expresable en el lenguaje, existe la clase de todas las cosas que tienen esa propiedad o cumplen esa condición. Sucumbiendo a la confusión señalada, dicha clase se representa con el mismo símbolo que el conjunto de todas las x que cumplen la condición $\varphi(x)$, a saber, $\{x / \varphi(x)\}$. Naturalmente, los objetos de esta clase satisfacen la condición que la define, es decir, $(\forall z) (z \in \{x / \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(z))$; donde alentamos la confusión utilizando el símbolo $\in$ para significar la pertenencia a una clase fregeana. Ciertamente hay clases que no se pertenecen a sí mismas, esto es clases x tales que $x \notin x$; por ejemplo, la clase de todas las moscas no es una mosca. Russell se preguntó por la clase de todas las clases que cumplen esa condición, la clase $r = \{x / x \notin x\}$ de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas.

3. Pseudoparadojas

Hemos definido a la paradoja como aquel argumento que tiene premisas aceptables, pero conclusión inaceptable. Ahora bien, aquellos argumentos paradójicos que simplemente sean argumentos inválidos (falaces) serán llamados pseudoparadójicos. Esto quiere decir que aquellas paradojas que mediante un sesudo análisis revelen una falta de consecuencia lógica entre premisas y conclusión serán consideradas como falacias encubiertas. En términos quineanos, las paradojas falsídicas son pseudoparadojas.

La propia palabra “pseudoparadoja” fue introducida por Stahl (1971, pp. 94-96) en su opúsculo titulado “*Al explorar lo infinito*”. Con esta palabra se alude a la calidad de un argumento cuya conclusión es falsa e inverosímil. Este conjunto de entes estará constituido por argumentos incorrectos que tendrán la apariencia de ser válidos, es decir, estará constituido por falacias, pero no por cualquier tipo de falacias sino solamente por aquellos malos argumentos considerados por la tradición como problemáticos. Toda pseudoparadoja es una falacia pero no toda falacia es una pseudoparadoja, porque si bien hay un error de razonamiento, este necesita que el argumento sea reinterpretado (reformulado, corregido e interpretado) de manera un tanto diferente a la formulación original para lograr desestimar su aspecto contradictorio.

La suposición de que esta clase existe produce inmediatamente una contradicción. En efecto, $(\forall z) (z \in \{x / x \notin x\} \leftrightarrow z \notin z)$.

4. La metafísica eleática

Antes de entrar de lleno a la paradoja de Aquiles y la tortuga explicaremos un poco su contexto filosófico. Parménides de Elea, maestro de Zenón, sostuvo que la nada es impensable, y como tal no puede existir. Todo lo que es, simplemente, es. Y, como no podemos concebir el no-ser, es imposible que algo pueda nacer del no-ser. Intentemos pensar en la nada. Todo lo que se nos ocurra siempre será algo. Por eso, la nada es impensable, inconcebible, nada puede provenir del no-ser. Así, este pensador afirma que es necesario decir y pensar lo que es, pues es posible ser; mientras a la nada no le es posible ser, pues jamás se impondrá esto: que haya cosas que no sean.

Recordemos su frase: “El ser es y el no-ser no es”. Además, Parménides sostenía que lo que percibimos como movimiento y cambio es solo mera ilusión. La realidad es una, permanente e indivisible. Es decir, el ser es inengendrado e imperecedero, íntegro, único en su género, incorruptible y plenamente realizado. Nunca fue ni será, puesto que es ahora, todo a la vez, uno y continuo. Para comprender esto pensemos en si el ser podría nacer o si podría morir. Decimos que no puede nacer. Pues si naciera significa que antes no era (no existía) y que después comenzó a ser. Pero, eso es imposible porque el ser siempre es y ha sido. Igualmente, el ser no puede morir, porque si muriera pasaría de ser al no-ser. Pero, eso es imposible porque el ser siempre es, ha sido y será. Así pues, se prueba que el ser no ha nacido ni ha muerto, es eterno.

Zenón de Elea encabezó la defensa de la filosofía de su maestro. Para sustentar la noción eleática del ser-uno elaboró una serie de paradojas que resaltaban el carácter contradictorio del movimiento. Para

ello, Zenón asumía que tanto el espacio como el tiempo son infinitamente divisibles y, así, el movimiento es, en rigor, impensable. Asimismo, sostenía que si existe la multiplicidad, no se debe pensar que es necesario que sus integrantes sean tantos cuantos son, ni más que ellos ni menos, pues si fuesen tantos cuantos son, serían limitados. Más bien, si existe la multiplicidad, se debe considerar que los entes son ilimitados o infinitos, pues en medio de los entes siempre hay otros y nuevamente en medio de estos, otros más

Asimismo, esto explica que, al aceptar que el movimiento sea un cambio de lugar en el tiempo, se originen contradicciones. Pues, si se parte de una representación del tiempo como una sucesión de momentos separados, entonces, al estudiar un objeto en movimiento en cada uno de los momentos de su traslado, se concluirá que, como permanece en reposo en cada uno de esos momentos, en suma, no se mueve (paradoja de la flecha). Y, si se considera el tiempo como un continuo infinito, entonces, dados dos móviles distanciados entre sí donde uno de ellos compite por alcanzar al otro, se concluirá que, aunque la distancia entre ambos se va reduciendo, sin embargo, siempre seguiría existiendo y, por ello, nunca se encontrarían (paradoja de Aquiles y la tortuga).

5. Paradoja de Aquiles y la Tortuga

Según Aristóteles en la *Física* al respecto de las paradojas eleáticas: “Cuatro son los argumentos de Zenón sobre el movimiento que

crean dificultades a los que tratan de resolver los problemas que plantean”⁶¹. Escribe Nicola Abbagnano al respecto:

Pero los argumentos más famosos de Zenón son los que formuló contra el movimiento, que nos han sido conservados por Aristóteles. El primero es el llamado de la *dicotomía*: para ir de *A* a *B*, un móvil tiene que efectuar primero la mitad del trayecto *A—B*; y antes aún, la mitad de esta mitad y así sucesivamente hasta el infinito; de tal manera que nunca llegará a *B*. El segundo argumento es el de *Aquiles*: Aquiles (o sea, el más veloz) nunca alcanzará a la tortuga (es decir, al más lento), pues la tortuga tiene un paso de ventaja. En efecto, antes de alcanzarla, Aquiles deberá alcanzar el punto de donde ha partido la tortuga de modo que ésta siempre tendrá ventaja. El tercer argumento es el de *la flecha*. La flecha, que aparece en movimiento, en realidad, está inmóvil: en efecto, en todo momento la flecha no puede ocupar sino un espacio igual a su largura y está inmóvil con respecto a este espacio; y como el tiempo está hecho de momentos, la flecha estará inmóvil durante todo el tiempo. El cuarto argumento es del *estadio*. Dos masas iguales, dotadas de velocidades iguales, deben recorrer espacios iguales en tiempos iguales. Pero si dos masas se mueven una contra otra desde las extremidades opuestas del estadio, cada una de ellas emplea en recorrer la longitud de la otra la mitad del tiempo que emplearía si una de ellas permaneciese quieta: de

⁶¹ Puede encontrarse una exposición adecuada y correcta en Mosterín y Torreti (2010, pp. 457-460).

donde Zenón deducía la conclusión de que la mitad del tiempo es igual al doble. (Abbagnano, 1994, p. 34)

Como un caso particular de este tipo de razonamientos hagamos memoria de la paradoja de Aquiles y la Tortuga:

El segundo argumento es el llamado “Aquiles”. Es éste: el corredor más lento no será nunca alcanzado por el más rápido, pues es necesario que el perseguidor llegue primero al lugar de donde partió el perseguido, de tal modo que el más lento estará siempre un poco más adelante (Barnes, 1992, p. 326)

Reescribe Borges (1966, p. 114) su exposición: Aquiles, símbolo de la velocidad, debe alcanzar a la tortuga, que representa la lentitud. Aunque Aquiles es diez veces más rápido que la tortuga, le concede una ventaja inicial de diez metros. Mientras Aquiles recorre esos diez metros, la tortuga avanza un metro más; cuando Aquiles cubre ese metro, la tortuga avanza un decímetro; al recorrer ese decímetro, la tortuga ya se ha adelantado un centímetro, y así sucesivamente. Por más que Aquiles se acerque, la tortuga siempre avanzará una pequeña distancia adicional, creando una secuencia infinita. Así se ilustra esta célebre paradoja, en la que Aquiles nunca logra alcanzarla.

La *pseudoparadoja* se presenta porque, por un lado, Aquiles no alcanzaría a la tortuga, y por el otro, sí. Aquiles no alcanzaría a la tortuga, porque después de haber corrido 10m, la tortuga ha avanzado 1m, después de haber corrido 1m, la tortuga habrá avanzado 10cm., después de haber corrido 10cm, la tortuga habrá avanzado 1cm, etc. Sin embargo, podemos también entender que la puede alcanzar sin dificultad ya que siempre que dos móviles distanciados tengan distinta velocidad y vayan

en la misma dirección el más rápido alcanzará al más lento. Incluso se puede calcular que la debe alcanzar antes de los 12 m, precisamente a los 11, 111 ... m, es decir $11, \bar{1}$, o, de manera equivalente, $10\frac{10}{9}$ m; pero esta solución se lograría establecer mucho tiempo después. Por aquella época, Aristóteles fue uno de los primeros en buscarle respuesta a esta paradoja.

La solución de Aristóteles incluyó un concepto de infinitud todavía vigente hasta el día de hoy. El infinito puede ser concebido de dos maneras en los términos aristotélicos de acto y potencia. En primer lugar, podemos hablar del infinito actual, es decir, aquella totalidad de elementos dados todos juntos de una vez. Este tipo de infinito se considera una entidad con identidad propia, una entidad en sí misma. Además, el infinito actual supone que en un mismo instante “t” reunimos un número infinito de elementos existentes en simultáneo en ese instante. Ejemplos⁶²:

- a) $B = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$ y B es **infinito**.
- b) $C = \{x / x \text{ es un punto de } AB\}$ y $\overline{AB}$ es una línea de **infinitos** puntos.
- c) El número de números naturales es **infinito**, específicamente, $\aleph_0$.

En segundo lugar, podemos hablar del infinito potencial, es decir, de aquello que es ilimitado por contar con la posibilidad de crecer o decrecer indefinidamente una magnitud dada. De esta manera, Aristóteles afirma que lo infinito no es aquello más allá de lo cual no hay

⁶² Imagina una biblioteca que contiene todos los libros posibles que podrían escribirse en cualquier idioma. En esta biblioteca, cada libro ya está presente y accesible, independientemente de si alguien lo ha leído o escrito. Aquí estamos concibiendo el infinito como una totalidad dada en un solo momento: todos los libros ya están allí, juntos, en ese instante. Este es un ejemplo de infinito actual, donde consideramos una colección completa y existente como una entidad en sí misma.

nada, sino aquello más allá de lo cual hay algo. En consecuencia, el infinito potencial supone que en cualquier instante “t” es posible seguir enumerando los elementos. Ejemplos⁶³:

- a) Como hay **infinitos** primos, para todo primo hay siempre otro mayor.
- b) El universo espacial es **infinito**.⁶⁴
- c) Si una línea es **infinita**, entonces puede prolongarse tanto como se necesite.

Ahora bien, para Aristóteles la infinitud existe, pero dicha infinitud no es un número infinito de algo, pues hablar de infinitud es hablar de una finitud que siempre puede expandirse. Según él, hay un número infinito de distancias entre este punto y la puerta, pero solo de un modo limitado. Por ejemplo, imagina una línea de 1 metro de longitud. Puedes dividirla en 2 partes de 0.5 metros cada una, luego en 4 partes de 0.25 metros, después en 8 partes de 0.125 metros, y así sucesivamente. No importa cuán grande sea el número finito de distancias que se haya marcado mentalmente, o, incluso, de manera física siempre se podrá marcar un número finito mayor. Esta finitud puede expandirse por siempre, pero seguirá siendo algo finito. Y, entonces, no debemos atravesar más que un número finito de distancias.

⁶³ Un ejemplo más práctico para comprender el infinito potencial sería pensar en un viaje hacia el horizonte. No importa cuánto camines, siempre puedes avanzar un poco más, porque el horizonte se desplaza a medida que te mueves. Aquí, el “infinito” no está dado como algo que posees, sino como un límite al que siempre te estás acercando pero que nunca alcanzas.

⁶⁴ El Universo tal y como lo entendemos es realmente infinito en todos los sentidos, abierto y no cerrado, pero también es finito por el tiempo, porque es tan grande como la distancia que ha recorrido la luz desde el “Big Bang” hasta hoy. De ahí que todo lo que esté fuera de esa distancia sea aún inaccesible.

Siguiendo la senda de la solución aristotélica, los matemáticos del S. XIX buscaron una manera de resolver esta vieja paradoja. Escribe Michael Clark al respecto lo siguiente:

Hasta el siglo XIX no se encontró un procedimiento matemático satisfactorio para sumar estos intervalos. La solución consistió en definir la suma de una serie infinita como el límite al que converge la sucesión de sus sumas parciales. Por simplicidad, supongamos que los dos se mueven a velocidad constante y que Aquiles solo corre el doble de rápido que la tortuga, a la que ha concedido medio kilómetro de ventaja. (...)

Cuando Aquiles recupera la ventaja que le había concedido a la tortuga, esta ha avanzado otro cuarto de kilómetro. Cuando Aquiles recorre este último tramo, la tortuga se encuentra un octavo de kilómetro por delante, y así sucesivamente. Los intervalos que recorre Aquiles son, expresados en fracciones de kilómetro, $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, ... Las sumas parciales son

$1/2$ kilómetro

$1/2 + 1/4$ de kilómetro = $3/4$ kilómetro

$1/2 + 1/4 + 1/8$ de kilómetro = $7/8$ de kilómetro

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$ de kilómetro = $15/16$ de kilómetro,

y así sucesivamente.

La sucesión de sumas parciales será, por tanto:

$1/2$, $3/4$, $7/8$, $15/16$, $31/32$, $63/64$, $127/128$, $255/256$, $511/512$, $1023/1024$, $2047/2048$, $4095/4096$...

Esta sucesión continúa indefinidamente, acercándose cada vez más a 1. En este caso, el límite de la serie o la suma de los intervalos

recorridos es 1. Aquiles se aproxima gradualmente a la tortuga hasta que la alcanza. (Clark, 2009, pp. 22-23)

Así, la pseudoparadoja se origina, porque en lugar de tomar la suma entera, se consideran los *infinitos sumandos*⁶⁵. Aquiles no puede recorrer en un tiempo finito uno por uno los infinitos segmentos correspondientes a los sumandos. En cambio, puede recorrer perfectamente en un tiempo finito el segmento que corresponde a la suma entera, y para alcanzar a la tortuga hará exactamente eso. De esta manera, la paradoja se logra reducir a una estrategia para engañar: una falacia. Lo que podemos concluir es que existe la creencia gratuita de que la suma de infinitos sumandos, todos números reales, no puede tener un valor finito. Aquiles corre tranquilamente sin preocuparse de los infinitos segmentos en que Zenón le fraccionó su recorrido; él alcanzará a la tortuga a los 11, $\bar{1}$ m, según la interpretación de Borgues.

La oposición entre el pensamiento y la realidad, que Zenón trazó en este caso no existe; *sólo apareció una oposición entre el pensamiento proto-científico y el científico*, pues en esa época aún no se desarrollaban suficientemente las bases para el cálculo por aproximación de valores de series convergentes de infinitos términos.⁶⁶

⁶⁵ El número 11, 111 ... (11, $\bar{1}$) puede tratarse, al igual que cualquier otro número real, como la suma de infinitos sumandos, en el caso de la interpretación de Borgues: 10; 1 ; 0,1 ; 0, 01 ; 0, 001 ; ...

⁶⁶ En línea con este argumento, la paradoja de Zenón es planteada como un acertijo o enigma resoluble con herramientas matemáticas que deshacen la supuesta anomalía con procedimientos sustentados y coherentes. Pero, en virtud de la honestidad académica, es necesario decir que algunos estudiosos mencionan que la paradoja referida no puede resolverse, porque la concepción de espacio que se maneja implícitamente, invita a entenderlo como algo infinitamente divisible. Esta visión implica que lo (material y) espacial tenga que ser una entidad semejante a las cantidades aludidas por los números, es decir, una cantidad que, por más pequeña

6. Falacia del continuo

Nuestra principal idea es la de concientizar a los interesados sobre nuestra denuncia que indica cierto parecido o analogía entre el “Aquiles” y la falacia del continuo. Por ello, lo que nos toca es tratar de definir el concepto de esta particular falacia. La mencionada argumentación inválida, también denominada como *argumento de la continuidad o del montón*, era llamada por los antiguos griegos como falacia del montón de trigo, de la barba y del calvo. Asimismo, incluso recibe el nombre de paradoja *sorites*, ya que “sorites” en griego quiere decir “pila, montón”. Se le atribuye a Eubúlides de Mileto, filósofo griego de la escuela megárica. Ésta consiste en asumir que pequeñas diferencias en una serie continua de sucesos son irrelevantes, o que posiciones extremas,

que sea, siempre tendrá mitad. Obviamente, el tema queda abierto, aunque según la mecánica cuántica es posible seguir dividiendo el micromundo de las partículas subatómicas aún más. Para Barnes, esta paradoja plantea ciertas cuestiones algo sabidas, pero no explicitadas:

(...) El último paso del argumento no es válido. De:

(1) Para todo i , si Aquiles está en C_i , la tortuga estará en $[C_{i+1}]$ (sic),

Zenón nos invita a inferir:

(2) Para todo punto P de AB , si Aquiles está en p , la tortuga estará en un punto p' , entre p y B .

(1) es cierta; y así lo demuestra el argumento de Zenón. (2) no implica que Aquiles alcance a la tortuga. Pero (2) no se sigue de (1). (2) podría deducirse de la conjunción de (1) y:

(3) Para todo punto p de AB , existe un i tal que C_i se encuentra entre p y B .

Pero es obvio que Zenón no puede contar con (3). Todo C_i está entre C y el hipotético punto de encuentro P ; puesto que C_i es el punto de AB en el que está la tortuga en el momento en el que Aquiles está en C_{i-1} . Así, con las dos suposiciones de que la tortuga nunca deja de moverse y que la velocidad de Aquiles es finita, no hay ningún i tal que $C_i = C_{i-1}$. Pero, si $C_i = P$, entonces $C_i = C_{i-1}$; por tanto, no hay ningún i tal que $C_i = P$. Evidentemente, ningún C_i está entre P y B . Por tanto, todos los C_i estarán entre C y P . Se sigue que Aquiles y la tortuga jamás se encuentran en un C_i , tal como se dice en (1). Pero se descubre [que] está conclusión es una trivialidad absoluta: los dos corredores nunca se encontrarán en ningún punto anterior a su primer punto de encuentro. De esto no se deduce nada como (2); del hecho de que no se encuentren antes de encontrarse apenas podemos inferir que nunca se encuentran. (1992, pp. 327-328)

conectadas por pequeñas diferencias intermedias, son la misma cosa porque no podemos establecer un límite objetivo para el cambio. (García Damborenea, 2000, p. 236) Pongamos dos ejemplos básicos:

-Dos granos no son un montón de trigo, tres granos tampoco, cuatro tampoco... Por ende, nunca habrá un montón mientras se añadan uno a uno.

-Si a alguien con cabello se le arranca un pelo, no queda calvo. Si se le vuelve a sacar otro pelo, tampoco queda calvo. Si se le saca un tercero pelo, sigue sin ser calvo. Y, así, pelo a pelo, nunca será calvo.⁶⁷

Mostremos el primer ejemplo en términos formales:

-Si 2 granos no son un montón, entonces 3 granos no son un montón

-Si 3 granos no son un montón, entonces 4 granos no son un montón

-Si 4 granos no son un montón, entonces 5 granos no son un montón, etc.

Por lo tanto, si 2 granos no son un montón, entonces un número inmenso de granos no son un montón.

Estas falacias hacen uso de la vaguedad en las definiciones de los términos que contienen. Precisamente, aplicar el sentido común a

⁶⁷ De acuerdo a Nancy Boyallian (2008) estos dos ejemplos muestran que la paradoja goza de la propiedad de reversibilidad dado que se mostraría una dirección ascendente y otra descendente. La más notoria peculiaridad de la paradoja de sorites, y quizás la prueba más evidente de su condición paradójica, es su reversibilidad. La misma consiste en la posibilidad de formular el argumento en sus ya conocidas dos direcciones.

La dirección ascendente:

(+) 'Un grano de arena no es un montón. El hecho de agregar un grano de arena a algo que no es un montón no lo convierte en un montón.'. Si aplicamos un número considerable de veces estas premisas concluimos que 'no importa cuantos granos de arena agregue, nunca formaré un montón'.

Y la dirección descendente:

(-) 'Supongamos que estamos frente a un montón de arena. Si quito un grano de arena éste sigue siendo un montón'. Luego, la reiterada aplicación de estas premisas nos lleva a concluir que 'un simple grano de arena es un montón'. Conclusión que contradice la primera premisa de la dirección ascendente de la paradoja.

conceptos vagos genera esta falacia o paradoja. La "vaguedad" se refiere a la situación en la que, aunque conocemos las características generales de un objeto o concepto, no es posible aplicar de manera precisa y sin ambigüedades un predicado vago debido a la falta de límites claros y definidos.

Por ejemplo, decir que algo está "cerca" puede ser ambiguo dependiendo del contexto. Así, si un amigo te dice que está "cerca" de tu casa, podría referirse a una distancia de 1 kilómetro o de 100 metros, pero no hay un límite claro que establezca exactamente qué distancia es considerada "cerca". Pensemos en las siguientes preguntas: ¿Cuál es el umbral de altura para que un hombre deje de ser considerado de baja estatura? ¿En qué momento exacto un óvulo fertilizado pasa a ser considerado una persona? ¿En qué punto específico una cortina blanca se considera 100% negra debido a la contaminación? ¿Cuántos años debe tener una persona para dejar de ser considerada "niño"? ¿Cuánto dinero debe tener una persona para ser clasificada como "rica"? ¿Cuántos años se necesitan para que una persona sea considerada "vieja"? ¿En qué cantidad específica la comida deja de ser suficiente y pasa a ser un exceso? ¿En qué momento exacto la humildad se convierte en soberbia o el humor en burla? ¿Cuánta agua necesita el trigo para que se considere que está resplandeciendo adecuadamente? ¿Cuántos vellos en el rostro de un hombre son suficientes para considerarlo como que tiene barba? En el caso estudiado el término vago que ocasiona la paradoja es "montón".

7. La relación entre el “Aquiles” y la falacia del continuo

Ahora, reformularemos la paradoja de Zenón adecuadamente para que podamos constatar que su estructura es análoga a la mentada falacia:

-En el primer instante, cuando Aquiles llegue a x , la tortuga estará en $x+\alpha$ y aunque no la habrá alcanzado estará cerca de alcanzarla.

-En el segundo instante, cuando Aquiles llegue a $x+\alpha$, la tortuga estará en $x+\beta$ (donde $\beta>\alpha$) y aunque no la habrá alcanzado estará cerca de alcanzarla.

-En el tercer instante, cuando Aquiles llegue a $x+\beta$, la tortuga estará en $x+\gamma$ (donde $\gamma>\beta$) y aunque no la habrá alcanzado estará cerca de alcanzarla, etc.

Por lo tanto, en el n -ésimo instante, cuando Aquiles llegue a $x+n$, la tortuga estará en $x+(n+\mathfrak{I})$ (donde “ $\mathfrak{I}$ ” es una cantidad cercana a cero) y aunque no la habrá alcanzado estará cerca de alcanzarla.

Por un lado, hemos mostrado que la pseudoparadoja zenónica se constituye como una violación de lo razonable, pues extiende y generaliza las distancias cada vez más cortas entre Aquiles y la tortuga afirmando que, de seguir así, nunca se tocarán. Siempre le faltará un poquito del recorrido y, por eso, nunca *el pélida* la alcanzará. Pero, matemáticamente, este asunto se desvanece porque, como hemos visto, la suma de infinitos elementos que van disminuyendo cuantitativamente puede dar lugar a una cantidad finita.

Por otro lado, en relación con la falacia del continuo, notamos cómo se puede asumir que pequeñas diferencias en una serie continua de sucesos son irrelevantes, dado que aunque siempre le faltará poquito para alcanzarla, puesto que la distancia que separa al corredor de la tortuga se acerca a cero, estrictamente nunca llegará a ser cero y, por ende, jamás se encontrará Aquiles con la inalcanzable tortuga (la cual a pesar de su lentitud característica llega a superar al griego físicamente más preparado de todos).

El término vago que notamos en este caso se trata del constructo “y aunque no la habrá alcanzado estará cerca de alcanzarla” ¿Cuándo una cosa está cerca de alcanzar a otra? ¿Cuánta distancia debe separarlos para que esta relación de “estar a punto de alcanzarlo” tenga sentido específico? ¿Deben estar a 1 m? ¿a dos? ¿a la mitad? ¿a un cuarto de metro? ¿a 0, 000000000001 metro? Por lo tanto, lo que queríamos demostrar, a saber, que la paradoja de Aquiles es una falacia del continuo ha sido sustentada finalmente. Invitamos a juzgar a quienes muestren interés por este asunto los argumentos aquí vertidos. Mientras tanto podemos decir: “¡L. Q. Q. D. !”

CUESTIONARIO # 4

1. ¿Qué caracteriza la paradoja de Aquiles y la tortuga?

- a) Distinción entre movimiento, espacio y tiempo.
- b) Una contradicción lógica clásica.
- c) Una cierta interpretación del concepto de infinito.

2. ¿Qué relación tiene esta paradoja con la falacia del continuo?

- a) Ambas se basan en términos vagos.
- b) Ambas surgen de razonamientos circulares.
- c) Ambas niegan la existencia de infinito.

3. ¿Qué autor ideó el concepto de pseudoparadojas?

- a) Quine.
- b) Tarski.
- c) Stahl.

4. ¿Qué paradoja supone la imposibilidad de realizar la adición entre infinitos sumandos?

- a) La del Mentiroso.
- b) La de Aquiles y la tortuga.
- c) La de Curry.

5. ¿Qué método se sugiere para resolver la paradoja de Aquiles y la tortuga?

- a) Separación de niveles de análisis.
- b) Uso de lógica matemática avanzada.
- c) Aplicación de la lógica paraconsistente.

6. ¿Qué sucedería si Aquiles no le da ventaja a la tortuga?

- a) Aquiles no superaría a la tortuga.
- b) Surgiría una falacia.
- c) Aquiles superaría a la tortuga.

7. ¿Qué buscaba probar Zenón de Elea con la paradoja de Aquiles y la tortuga?

- a) La posibilidad del cambio.
- b) La inutilidad de la razón.
- c) La imposibilidad del movimiento.

8. ¿Qué sumatoria refleja de cierto modo a la paradoja de Aquiles y la tortuga?

- a) $1+1/10+1/100+1/1000+....$
- b) $1+2+3+4+5+....$
- c) $a-a+a-a+a-a....$

9. ¿Qué significa que a un problema se le denomine “falacia”?

- a) Que hay un error escondido.
- b) Que no es psicológicamente persuasivo.
- c) Que no hay error.

10. ¿Qué significa que a un problema se le denomine “paradoja”?

- a) Que se trata de algo poco sorpresivo.
- b) Que es sorprendente y requiere análisis cuidadoso.
- c) Que hay un error escondido.

Solucionario: 1c, 2a, 3c, 4b, 5b, 6c, 7c, 8a, 9a, 10b.



CAPÍTULO 5

SOBRE LA PARADOJA DE EPIMÉNIDES

Resumen: En el presente apartado nos ocuparemos de analizar tanto la paradoja del Mentiroso como la paradoja de Epiménides. Primero, definiremos el significado del término “paradoja” y luego revisaremos la paradoja del Mentiroso. Sin embargo, después nos concentraremos en ‘disolver’ formalmente la supuesta paradoja de Epiménides. Demostraremos que esta paradoja no tiene razones suficientes para tener el nombre de ‘paradoja’.

1. Introducción

Una falacia es un razonamiento engañoso que parece válido pero que no lo es. Una falacia es un argumento que aparenta ser psicológicamente persuasivo y nada más. Si se le estudia bien, se verá que no hay un argumento correcto. Algunas paradojas históricas de la filosofía han logrado ser desestimadas como tales estudiando una manera de resolverlas (o disolverlas) que muestre su engaño o error. En este trabajo intentaremos mostrar cómo es posible disolver la paradoja de Epiménides. Para mostrar cómo ello podría lograrse, analizaremos una vieja conocida: la de Aquiles y la Tortuga. Esta es replanteada por Borges:

Aquiles, símbolo de rapidez, tiene que alcanzar la tortuga, símbolo de morosidad. Aquiles corre diez veces más ligero que la tortuga y le da diez metros de ventaja. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno; Aquiles corre ese metro, la tortuga corre un decímetro; Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centímetro; Aquiles corre ese centímetro, la tortuga un milímetro; Aquiles el milímetro, la tortuga un décimo de milímetro, y así infinitamente, de modo que Aquiles puede correr para siempre sin alcanzarla. Así la paradoja inmortal. (1966, p. 114)

La aparente paradoja surge porque, en principio, se plantea que Aquiles no podría alcanzar a la tortuga, pero también se concluye que sí lo hace. Según el razonamiento inicial, Aquiles nunca alcanzaría a la tortuga porque, tras recorrer 10 metros, la tortuga avanzaría 1 metro; luego, al correr 1 metro más, la tortuga habría avanzado 10 cm; al avanzar 10 cm, la tortuga habría recorrido 1 cm, y así sucesivamente. Sin embargo, sabemos que cuando dos objetos en movimiento, que tienen velocidades

distintas y se dirigen en la misma dirección, el más rápido inevitablemente alcanzará al más lento. En este caso, Aquiles debería alcanzar a la tortuga antes de recorrer 12 metros, aproximadamente en el punto $11,111\dots$ metros (o $11,\bar{1}$, equivalente a $10 + \frac{10}{9}$ metros). No obstante, esta explicación matemática no fue posible hasta el siglo XIX.

Michael Clark (2009) explica que no se desarrolló un método matemático adecuado para sumar intervalos infinitos hasta el siglo XIX. La solución fue definir la suma de una serie infinita como el límite al que tiende la sucesión de sus sumas parciales. Para simplificar, supongamos que ambos se mueven a velocidades constantes y que Aquiles corre al doble de velocidad que la tortuga, a quien concedió medio kilómetro de ventaja. Cuando Aquiles cubre esa distancia, la tortuga habrá avanzado un cuarto de kilómetro; cuando Aquiles recorre este nuevo tramo, la tortuga estará un octavo de kilómetro más adelante, y así sucesivamente. Los intervalos que recorre Aquiles se pueden expresar como $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots$, y sus sumas parciales serían:

$1/2$ kilómetro

$1/2 + 1/4$ de kilómetro = $3/4$ kilómetro

$1/2 + 1/4 + 1/8$ de kilómetro = $7/8$ de kilómetro

$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$ de kilómetro = $15/16$ de kilómetro, y así sucesivamente.

La sucesión de estas sumas parciales ($1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots$) se aproxima indefinidamente a 1 kilómetro, que es el límite de la serie. Esto significa que Aquiles alcanza a la tortuga al recorrer el kilómetro completo. La paradoja se genera porque, en lugar de considerar la suma completa, se analizan los infinitos segmentos que la componen. Aunque

Aquiles no puede recorrer individualmente los infinitos fragmentos en un tiempo finito, sí puede cubrir en ese tiempo el total del segmento correspondiente a la suma completa. Así, la paradoja se descompone en una falacia: la creencia errónea de que la suma de infinitos términos reales no puede ser finita. Según la interpretación de Borges, Aquiles alcanzará a la tortuga exactamente en los $11,\bar{1}$ metros. En realidad, la oposición planteada por Zenón entre pensamiento y realidad no existe; lo que se observa es una diferencia entre el pensamiento proto-científico y el científico, ya que en la época de Zenón aún no se habían desarrollado las bases matemáticas necesarias para calcular series convergentes con precisión.

Pues bien, al igual que con la paradoja de Zenón, nosotros queremos disolver la paradoja de Epiménides. Para ello, partiremos por definir términos.

2. Definición de paradoja

La palabra “paradoja” viene del griego *παράδοξος* – *ον* y significa más allá o contrario a la opinión común. En ese sentido, es algo inesperado, increíble, extraño y raro. Coloquialmente, las paradojas son expresiones breves que encierran contradicción o generan sorpresa por absurdas. Ejemplos:

- 1) Nunca digas nunca.
- 2) Soy ateo gracias a Dios.
- 3) Es de mala suerte ser supersticioso.
- 4) La única constante es el cambio.
- 5) Menos es más.

- 6) Prohibido prohibir.
- 7) Solo sé que nada sé.
- 8) Cuanto más trato de olvidarte, más te recuerdo.
- 9) Este es mi consejo: no sigas ninguno.
- 10) El hombre es como el oso mientras más feo, más hermoso.⁶⁸

En términos técnicos, una paradoja es un razonamiento que conduce a una conclusión que parece inaceptable, partiendo de premisas que, a su vez, parecen aceptables y empleando un proceso de inferencia que también aparenta ser válido (Clark, 2009). Según Piotr Łukowski (2011), una paradoja implica tres elementos clave:

1. Las reglas de inferencia se han aplicado de manera correcta.
2. El razonamiento ha sido formulado de manera adecuada.
3. Existe la convicción de que nuestras creencias actuales son racionales.

Y sucede que, a pesar de lo anterior, se llega a una contradicción. Para entender esto pongamos algunos ejemplos:

a. La paradoja del abuelo o de los viajes en el tiempo

Si alguien viajara en el tiempo y matara a su propio abuelo, entonces esa persona no habría existido. Pero si no hubiera existido entonces

⁶⁸ Hay al menos tres significados de esta frase. Primero, se puede entender que el hombre que es feo, logra ser hermoso porque desarrolla otras habilidades (saber hablar y escribir, por ejemplo) que le hace interesante y virtuoso (hermoso, en cierto modo). Segundo, puede interpretarse que el hombre debe ser feo si es hombre de verdad, pues si fuera hermoso sería menos hombre (esto alude a la típica rudeza masculina y a sus toscos rasgos, al menos esto se piensa como parte de la idiosincrasia peruana en pleno S. XXI). Tercero, podría significar que un hombre feo será más valorado por una posible pareja precisamente porque al ser feo nadie más lo pretenderá ni se lo querrán quitar, siendo únicamente y exclusivamente para ella (entonces sería hermoso porque es único y nadie se atreverá jamás a seducirlo).

nunca hubiera viajado en el tiempo y, por ende, no habría matado a su propio abuelo. Y como no mató a su abuelo, sigue vivo y tal vez queriendo viajar en el tiempo para matar a su propio abuelo. ¿Cómo es esto posible?

b. La paradoja de Protágoras

Protágoras le enseña a su alumno Evatlo abogacía siempre y cuando cumpla con este pacto, a saber, que le pague cuando gane su primer juicio. Como pasa el tiempo y no le paga Protágoras lo demanda. Estando ambos ante el juez, Protágoras sostiene que él siempre recibirá su dinero lo cual explica afirmando que, si Protágoras pierde el juicio, entonces el pacto le obliga a Evatlo a pagar y si Protágoras lo gana, entonces por la demanda también Evatlo tiene que pagarle. Evatlo no se queda callado y le dice que por lo mismo él no debe pagarle lo cual explica afirmando que, si Evatlo pierde el juicio, de acuerdo al pacto no debería pagarle y si Evatlo lo gana, la demanda no tuvo lugar y no está obligado a pagarle. Si Ud. fuera el juez, ¿quién diría que tiene la razón?

c. La paradoja del barbero

En un pueblo un barbero dice que solo afeita a aquellos que no se afeitan a sí mismos. Por lógica, no afeita a los que ya saben afeitarse por sí mismos. Pero si esto es así ¿el barbero se afeita a sí mismo o no?

d. La paradoja del Quijote

En una ciudad hay un puente por el cual solo pasan las personas que dicen la verdad y si dicen alguna falsedad, se les castiga colgándolos en la horca. A un poblador se le preguntó la razón por la que pasaba por el

puede y dijo que él iba a ser colgado en la horca. ¿Lo que dijo es verdad o mentira?

e. La paradoja del Mentiroso

Supongamos que una oración dice de sí misma que es falsa (es decir, esta oración es falsa):

(1): (1) es falsa

¿Es verdadera o falsa la oración (1)?

Para entenderla con mayor facilidad, plantearemos esta paradoja en forma más sencilla:

* Aquí hay tres falsedades:

1. Lima es la capital de Sudáfrica
2. Perú queda en Sudamérica.
3. $1+2+3+4=20$

¿Cuál es la tercera falsedad?⁶⁹

Ahora bien, según García Zárate: “Las paradojas son tipos especiales de contradicción [aquella dada por una oración] cuya verdad implica su falsedad, del mismo modo que su falsedad implica su verdad” (2007, p. 233). Esto mismo también es afirmado por Piscoya (1995b, p. 205). Por ello, la paradoja del Mentiroso cumpliría con todas las credenciales como para ser llamada paradoja legítimamente.

Sin embargo, en otro texto de Piscoya, se puede leer lo siguiente:

⁶⁹ La única opción posible sería considerar que la oración * es falsa. Pero, si así fuera ocurriría un problema.

1) Si * es falsa, entonces * es verdad. Esto se explica porque al ser * falsa, se cumplirían las tres falsedades lo cual haría verdadera lo contenido en *.

2) Si * es verdad, entonces * es falsa. Esto se explica porque al ser * verdadera ya no existirían tres falsedades sino solo dos, lo cual hace falso lo contenido en *.

El ejemplo más conocido es la paradoja de Epiménides o Paradoja del Cretense, o Paradoja del Mentiroso. Data de los tiempos de Platón.

Se cuenta que Epiménides, ciudadano cretense, decía “todos los cretenses son mentirosos”, afirmación que abreviadamente podemos representar mediante la letra A. Los datos anteriores permiten preguntar: ¿Es la afirmación A verdadera o falsa? Si se acepta que es verdadera, entonces como Epiménides era cretense y mentiroso, y él era el que afirmaba A, entonces debe aceptarse que A es falsa. Recíprocamente si se acepta que A es falsa, entonces no todos los cretenses son mentirosos y Epiménides puede decir la verdad, por tanto, debe aceptarse que A es verdadera. Epiménides formuló una proposición que satisface estrictamente la definición de paradoja, en la medida que la aceptación de su verdad implica su falsedad y la aceptación de su falsedad implica su verdad. (1999, p. 118)

Es aquí donde se equivoca Piscoya: la paradoja del Mentiroso y la de Epiménides no son lo mismo. Es más, la de Epiménides no es realmente paradójica. Para entender que la paradoja de Epiménides no es como la del Mentiroso nosotros expondremos la versión formal del Mentiroso⁷⁰.

⁷⁰ En obras como las de José Ferrater Mora (1994), Saúl Kripke (1997) y Eduardo Barrio (1998) se menciona a la paradoja de Epiménides como un caso similar a la paradoja del Mentiroso. Sin embargo, algunos autores también han sugerido la relevancia de este asunto. Por ejemplo, mientras que Gerold Stahl (1956) propone estudiar la paradojicidad del “Epiménides”, Karl Popper (1945) al igual que Susan Haack (1982) y Stephen Cole Kleene (1974) son unos de los pocos autores en indicar lo que ocurre a nivel lógico en la mentada paradoja.

3. La paradoja del Mentiroso

Susan Haack (1982, pp. 173-174) en *Filosofías de las Lógicas* trata esta versión de la paradoja del *Mentiroso* considerando solamente el aspecto formal de la misma y dejando de lado el uso de predicados veritativos. La versión que presentamos a continuación está basada en la propuesta de Haack, pero ha sido modificada de tal modo que la premisa sea única puesto que la autora prefiere utilizar dos y hasta tres premisas, algo, a nuestro parecer, innecesario. Como ya hemos anotado, la formulación más simple de la paradoja del *Mentiroso* es la siguiente: “Esta oración es falsa”. En este caso hemos necesitado utilizar una oración más larga y más compleja. El argumento de la paradoja de *El Mentiroso* es éste:

1. La oración numerada con 1 es la oración “Toda oración numerada con 1 está negada”. POR LO TANTO, la oración numerada con 1 es verdadera syss^{71} es falsa.

Hemos utilizado la siguiente abreviatura: el nombre r de “la oración numerada con 1”, además de los predicados veritativos correspondientes a la falsedad y la verdad, es decir, V o F . También nos valemos del esquema T de Tarski y de sus consecuencias teoremáticas⁷². A nivel de

⁷¹ Abreviatura para ‘si y sólo si’, v. g., ‘ $\leftrightarrow$ ’.

⁷² El esquema T de Tarski es el siguiente:

(T) p es verdadera $\leftrightarrow p$.

Además, la expresión (T) tiene las siguientes consecuencias:

(T)*: $V(p) \rightarrow p$

(T)**: $\sim p \rightarrow F(p)$

(T)**: $F(p) \rightarrow \sim p$

(T)****: $p \rightarrow V(p)$

(T)*****: $\sim F(p) \rightarrow \sim \sim p$

reglas de deducción, hemos considerado conveniente hacer uso de la regla que rige las identidades (I) (Suppes, 1979, p. 144). Enseguida, aplicaremos una prueba condicional doble.

1. $r = (\forall y) [(r = y) \rightarrow \sim y]$ // $\therefore V(r) \leftrightarrow F(r)$
2. $V(r)$ // $\therefore F(r)$
3. $V((\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y])$ 2 y 1 Regla de las identidades
4. $(\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y]$ 3 y (T)* Modus Ponens
5. $r = (\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y] \rightarrow \sim(\forall y) [(r = y) \rightarrow \sim y]$
4 Ejemplificación Universal
6. $\sim(\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y]$ 1 y 5 Modus Ponens
7. $F((\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y])$ 6 y (T)** Modus Ponens
8. $F(r)$ 7 y 1 Regla de las identidades
9. $V(r) \rightarrow F(r)$ 2-8 Prueba Condicional

Hasta aquí hemos probado que, si r es verdadera, entonces es falsa. Ahora probaremos que, si es falsa, es verdadera. Con ello, conseguimos probar su estatus de paradójico.

10. $F(r)$ // $\therefore V(r)$
11. $F((\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y])$ 10 y 1 Regla de las identidades
12. $\sim(\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y]$ 11 y (T)*** Modus Ponens
13. $\sim\sim(\exists y) \sim[(r = y) \rightarrow \sim y]$ 12 Intercambio de cuantificadores
14. $(\exists y) \sim[(r = y) \rightarrow \sim y]$ 13 Doble negación
15. $(\exists y) [(r = y) \wedge y]$ 14 Def. condicional, De Morgan y Doble Negación
16. $(r = \alpha) \wedge \alpha$ 15 Ejemplificación Existencial

Considérese que en lugar de p puede ir cualquier proposición que se nos ocurra y el esquema de Tarski y sus consecuencias siempre se cumplirían.

17. α	16 Simplificación
18. $r = \alpha$	16 Simplificación
19. $V(\alpha)$	17 y (T)**** Modus Ponens
20. $V(r)$	19 y 18 Regla de las identidades
21. $F(r) \rightarrow V(r)$	10-20 Prueba Condicional
22. $[V(r) \rightarrow F(r)] \wedge [F(r) \rightarrow V(r)]$	9 y 21 Conjunción
23. $V(r) \leftrightarrow F(r)$	22 Definición bicondicional

En lo que sigue, nosotros rechazaremos que la paradoja de Epiménides sea semejante a la del Mentiroso. Por ende, nos concentraremos en probar lógicamente que la paradoja de Epiménides no es una paradoja.

4. La paradoja de Epiménides

La paradoja de Epiménides (Pablo, 2001, p. 1193-1194) se plantea enseguida:

1. Una expresión es dicha por Epiménides. $[P(q)]$
2. Esta expresión es la frase “Todo lo que es dicho por un cretense, es falso”. $[q = (\forall y)(C(y) \rightarrow F(y))]$
3. Si una expresión es dicha por Epiménides, entonces es dicha por un cretense.

$$[P(q) \rightarrow C(q)].$$

POR LO TANTO, lo que Epiménides dice es verdadero si y solo si es falso.

$$[V(q) \leftrightarrow F(q)]$$

A continuación, vamos a probar:

$$\{P(q) \wedge q=(\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)] \wedge [P(q) \rightarrow C(q)]\} \rightarrow [V(q) \rightarrow F(q)]$$

1. $P(q)$
2. $q=(\forall y) [C(y) \rightarrow F(y)]$
3. $P(q) \rightarrow C(q)$ // $\therefore V(q) \rightarrow F(q)$
4. $V(q)$ // $\therefore F(q)$
5. $V ((\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)])$ 2 y 4 Regla de las identidades
6. $(\forall y) [C(y) \rightarrow F(y)]$ 5 y (T)* Modus Ponens
7. $C(q) \rightarrow F(q)$ 6 Ejemplificación Universal
8. $P(q) \rightarrow F(q)$ 3 y 7 Silogismo Hipotético
9. $F(q)$ 1 y 8 Modus Ponens
10. $V(q) \rightarrow F(q)$ 4-9 Prueba condicional

La anterior demostración ha sido la prueba de la primera “parte” de la conclusión de la paradoja de Epiménides. Ahora bien, la falsa analogía entre esta paradoja y la del *Mentiroso* nos obliga a probar que si la oración de Epiménides es verdadera, entonces es falsa y que si la oración de Epiménides es falsa entonces es verdadera. Pero, solamente podemos probar que $V(q) \rightarrow F(q)$. Postulemos, metalógicamente, la siguiente afirmación: “Si tenemos un consistente cuerpo de premisas “z” entonces podemos afirmar que solo podemos derivar, o solo la fórmula B, o solo $\sim B$. Para demostrar la imposibilidad de demostración de una conclusión $\sim B$ (y, en consecuencia la demostrabilidad de B) a partir de cierto cuerpo de premisas “z”, bastará con mostrar que sólo se puede llegar a $\sim B$ por métodos erróneos”. Siguiendo esta estrategia y haciendo

que $\sim B = "F(q) \rightarrow V(q)$, donde $q =$ ‘Todos los cretenses son mentirosos’”, podemos demostrar la imposibilidad de demostración de $F(q) \rightarrow V(q)$ a partir del cuerpo de tres premisas $z = \{P(q) \wedge q = (\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)] \wedge [P(q) \rightarrow C(q)]\}$. Como sabemos la fórmula $F(q) \rightarrow V(q)$ puede ser reducida a $V(q)$, y por lo tanto, con el argumento anterior habremos demostrado la imposibilidad de demostración de $V(q)$, y derivadamente la demostrabilidad de $F(q)$.

Enseguida ensayaremos una “prueba” de la segunda parte de la conclusión de la paradoja de Epiménides para luego revisarla y corregirla.

Probar: $\{P(q) \wedge q = (\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)] \wedge P(q) \rightarrow C(q)\} \rightarrow [F(q) \rightarrow V(q)]$

1. $P(q)$
2. $q = (\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)]$
3. $P(q) \rightarrow C(q)$ // $\therefore F(q) \rightarrow V(q)$
4. $F(q)$ // $\therefore V(q)$
5. $F((\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)])$ 4 y 2 Regla de las identidades
6. $\sim(\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)]$ 5 y (T)*** Modus Ponens
7. $\sim\sim(\exists y)\sim[C(y) \rightarrow F(y)]$ 6 Intercambio de cuantificadores
8. $(\exists y)\sim[C(y) \rightarrow F(y)]$ 7 Doble Negación
9. $\sim[C(q) \rightarrow F(q)]$ 8 Ejemplificación existencial
10. $C(q) \wedge \sim F(q)$ 9 Def. del condicional y De Morgan
11. $\sim F(q)$ 10 Simplificación
12. $\sim\sim q$ 11 y (T)***** Modus Tollens
13. q 12 Doble Negación
14. $V(q)$ 13 y (T)**** Modus Ponens
15. $F(q) \rightarrow V(q)$ 4-14 Prueba condicional

Si analizamos con detenimiento el paso 9 de esta última prueba nos daremos cuenta del error en el que se cae al afirmar que la paradoja de Epiménides es verdadera si y solo si es falsa: no podemos emplear constantes al hacer la ejemplificación existencial. Hacer semejante atrocidad lógica sería como deducir que Michifuz es negro, porque algunos gatos son negros y porque Michifuz es un gato. Volviendo al análisis lógico dejado de lado líneas arriba, la prueba del segundo argumento la seguiremos despachando desde donde fue notado el desliz, es decir, desde el paso 9 y deduciremos solo lo que se puede deducir.

9. $\sim[C(\alpha) \rightarrow F(\alpha)]$	8 Ejemplificación existencial
10. $C(\alpha) \wedge \sim F(\alpha)$	9 Def. del condicional y De Morgan
11. $\sim F(\alpha)$	10 Simplificación
12. $\sim\sim\alpha$	11 y (T)***** Modus Tollens
13. α	12 Doble Negación
14. $V(\alpha)$	13 y (T)**** Modus Ponens
15. $\exists z V(z)$	15 Generalización existencial
16. $F(q) \rightarrow (\exists z) V(z)$	4-16 Prueba condicional

Lo que se ha probado es que si la expresión de Epiménides es falsa, entonces algunas afirmaciones son verdaderas. Eso no quiere decir que, específicamente, la frase de Epiménides sea la verdadera. Ahora bien, sólo en un caso especial podemos decir que “Todos los cretenses son mentirosos” es verdadera y falsa a la vez (como la oración del Mentiroso): si asumimos que sólo existe un único cretense, a saber, Epiménides. Esto sucederá debido a que si sólo existe un cretense, podemos suponer falsa a la oración de Epiménides y esto no impediría que también la oración obtenida (es decir, “Algunos cretenses son honestos”) sea verdadera por

la sencilla razón de que si el referente de “algunos” y “todos” es único, v. g. Epiménides, entonces pasar de una premisa existencial a una universal no representaría problema alguno. Sin embargo, el dato de que Epiménides es el único habitante de su isla altera el esquema original de premisas y cambia el argumento de Epiménides por otro muy distinto. Así hemos disuelto la supuesta paradoja de Epiménides.

Esto prueba que la paradoja de Epiménides es, en realidad, una pseudoparadoja por ser un argumento que cae en una falacia. Específicamente, nos referimos a la falacia que resulta de aplicar mal una regla lógica. La idea es que es incorrecto creer que la negación de “Todas las afirmaciones son verdaderas” es “Ninguna afirmación es verdadera” (o sea, “Todas las afirmaciones no son verdaderas”⁷³). Lo correcto es asumir que la negación de la mencionada proposición universal afirmativa es “Algunas afirmaciones no son verdaderas”.

Trataremos esto de modo pedagógico. ¿Cuál es la negación de “Todos los estudiantes son limeños” (A)? Pensemos que una proposición y su negación no puede tener ambos el mismo valor de verdad. Si consideramos que la respuesta a nuestra pregunta es “Ningún estudiante es limeño” (E), estamos equivocados pues ambas proposiciones pueden ser falsas. Imaginemos que estamos en una fiesta universitaria de fin de ciclo académico. Vemos que bailan muchas personas y dado que las universidades reúnen a mucha gente, algunos serán limeños y otros no. En este caso, tanto A como E resultan ser falsedades. Por ende, E no es la negación de A ni viceversa. En realidad, la negación de A es “Algunos estudiantes no son limeños” (O). Por ejemplo, si alguien preguntara en la

⁷³ En este trabajo asumimos que la “Ningún S es P” equivale a “Todo S no es P” (Mora, 2020e).

reunión que mencionábamos “¿Todos los estudiantes son limeños?” habría alguno que diría “No, es no es cierto. Algunos estudiantes no somos limeños”. Es decir, para negar que todos los estudiantes son limeños solo hace falta mostrar que uno no lo es. Y como uno es alguno, la negación de A es O.

5. Conclusiones

- La paradoja del Mentiroso es paradójica porque a partir de su verdad se deduce su falsedad y a partir de su falsedad se deduce su verdad.
- La paradoja de Epiménides es solo paradoja en un sentido, pues si se supone su verdad se concluye su falsedad pero no viceversa. Así, en realidad no es una paradoja completamente.
- La paradoja de Epiménides es una seudoparadoja (un argumento falaz o una paradoja falsídica).

CUESTIONARIO # 5

1. ¿Qué hace única la paradoja de Epiménides respecto al mentiroso?

- a) No depende de autorreferencia.
- b) Implica un razonamiento válido.
- c) Es una paradoja falsídica.

2. ¿Qué implica aceptar la frase de Epiménides como verdadera?

- a) Que todos los cretenses son honestos
- b) Que Epiménides es mentiroso
- c) Que los cretenses no pueden ser juzgados

3. ¿Qué implica aceptar la frase de Epiménides como falsa?

- a) Que ningún cretense es honesto.
- b) Que algunos cretenses no son mentirosos.
- c) Que los cretenses son mentirosos.

4. ¿Qué autores identifican a la paradoja del mentiroso con la de Epiménides?

- a) Ferrater Mora, Kripke y Piscoya.
- b) Stephen Cole Kleene, Hack y Russell.
- c) Stahl, Popper y Barrio.

5. ¿Qué se concluye finalmente de la paradoja de Epiménides?

- a) Que es una paradoja genuina
- b) Que es un error de lógica
- c) Que no es una verdadera paradoja

6. ¿Qué caracteriza a la paradoja de Epiménides como falsídica?

- a) Uso de premisas contradictorias entre sí.
- b) Demuestra una contradicción real.
- c) Demuestra una contradicción aparente, sin ser tal.

7. ¿Qué método se usa para resolver esta paradoja?

- a) Identificación de conceptos confusos.
- b) Reformulación y análisis lógico.
- c) Rechazo de premisas iniciales.

8. ¿Qué vínculo tiene Epiménides con los cretenses?

- a) Es uno de ellos.
- b) Los acusa de honestidad.
- c) Es un filósofo aristotélico.

9. ¿Qué característica distingue la paradoja del mentiroso de la de Epiménides?

- a) La conclusión de la paradoja de Epiménides es del tipo $A \leftrightarrow \sim A$.
- b) La conclusión de la paradoja del mentiroso es del tipo $A \leftrightarrow \sim A$.
- c) La conclusión de la paradoja de Epiménides es del tipo $A \leftrightarrow A$.

10. ¿Qué conclusión se extrae del análisis lógico de la paradoja de Epiménides?

- a) No toda paradoja es genuina y, además, pueden ser enfrentadas.
- b) Las paradojas son siempre irresolubles y no deben discutirse.
- c) Las paradojas son imposibles de ser analizadas lógicamente.

Solucionario: 1c, 2b, 3b, 4a, 5c, 6c, 7b, 8a, 9b, 10a.



CAPÍTULO 6

DISOLVIENDO LA PARADOJA DE CURRY

Resumen: En este trabajo de investigación se estudia a la paradoja de Curry. En primer lugar, se presenta una propuesta para entender lo que es la lógica y lo que hacen los lógicos y, además, la importancia de las paradojas como motivos de reflexión. En segundo lugar, se expone la paradoja de Curry y se explica que, a partir de esta, es posible probar cualquier enunciado. Esto alude a la trivialidad deductiva. En tercer lugar, se la relaciona con otras paradojas ya conocidas. Nos referimos a la paradoja de *El Mentiroso* y a la de Russell. Si bien es posible tratar esta paradoja desde la lógica clásica, resulta más interesante bajo el análisis de las lógicas no clásicas. Así, en cuarto lugar, se analiza dicha paradoja desde el enfoque no clásico de las lógicas paracompleta, la paraconsistente y la relevante pero no se logra resolverla exitosamente. En quinto lugar, mostramos que desde el enfoque pragmático de Paul Grice es posible entenderla de cierto modo. Finalmente, la relacionamos con la falacia de énfasis.

1. Lógica y paradojas

Antes de ir de lleno a la temática que nos ocupa es importante tratar sobre lo que es la lógica y el valor de las paradojas para la misma. Esto se justifica pues el trato que hacemos de la paradoja de Curry implica una forma especial de entender la lógica.

Pues bien, la lógica es una disciplina filosófica. Su carácter científico y formal es una condición que solo admite una vez empezada la investigación de naturaleza matemática y abstracta. Sin embargo, la motivación que inspiró su desenvolvimiento está dada por un cuestionamiento filosófico. Según Carrera, “(...) actualmente la lógica es una ciencia formal y (...) posee principios y métodos potentes e importantes para el desarrollo de la ciencia y de la informática. (...)” (2016, p. 19). Esto es cierto, pero en parte. No obstante, se equivoca cuando afirma que la lógica al ser cuestionada por la matemática se independizó totalmente de la filosofía para ser considerada una ciencia formal que actualmente estudia los principios y métodos lógicos que buscan determinar la validez o no validez de los razonamientos. Si esto fuera así, la lógica no tendría sentido de ser enseñada en las escuelas de filosofía de las universidades de la mayor parte del mundo. Según Morado:

Los filósofos normalmente no son matemáticos, entonces la lógica matemática se sale un poco de los intereses, y se siente ese desfase por el hecho de que, a veces, la gente que más sabe lógica es la gente que está en matemáticas, o la gente que está en las ciencias de la computación, o la gente que está en lingüística y no los filósofos mismos, porque no hay una lógica óptima para el

análisis filosófico. Pero la idea de que puede ser usada para el análisis lógico es tan antigua como la lógica misma (Arieta, 1995, p. 70).

Para Hofweber, la lógica es una disciplina filosófica y puede ser concebida de cuatro modos todos ellos relacionados con la filosofía en mayor o menor medida.

(L1) el estudio de los lenguajes formales artificiales.

(L2) el estudio de las inferencias formalmente válidas y la consecuencia lógica.

(L3) el estudio de las verdades lógicas.

(L4) el estudio (...) de los juicios. (Hofweber, 2017, párr. 12)

Hofweber (2017) considera que L1 es la más técnica de las concepciones de la lógica pues se relaciona mucho con la matemática, pero no hay que olvidar que dichos desarrollos han sido posibles por cuestionamientos filosóficos a los fundamentos de la matemática. L2 se dedica a estudiar cuestiones como el tema de la validez y su relación con las constantes lógicas para entender lo que es la consecuencia lógica. L3 constituye la búsqueda de aquellas verdades más generales, las mismas que están contenidas en cualquier otro cuerpo de verdades que cualquier otra ciencia pretenda describir. Se podrá notar que L2 y L3 están muy relacionadas. L4 hoy en día se halla abandonada como programa de investigación, pero fue muy importante en su momento.

Para Morado, la lógica puede ser comprendida en sus tres niveles: lógica como arte, lógica como ciencia y lógica especializada. En tanto arte se refiere a las habilidades de uso del lenguaje natural, la argumentación y su relación con el uso de reglas lógicas. En tanto ciencia consta de

cálculo proposicional y cuantificacional. Finalmente, la lógica especializada alude a las lógicas no clásicas, la metalógica y la filosofía de la lógica (Morado, 2008).

De hecho, este mismo texto se podría enmarcar dentro de la filosofía de la lógica, pues dicha disciplina trata sobre temas como la forma lógica, la consecuencia lógica, las teorías de la verdad, las constantes lógicas y la problematización de las lógicas no-clásicas (Lazzer, 2002). Habiendo explicado el asunto de la lógica, debemos exponer la cuestión del quehacer del lógico pues el lógico no solo se dedica a construir sistemas axiomáticos, sino que su labor es mucho más amplia.

Así pues, para saber qué hacen los lógicos es importante saber cómo se ha concebido a la lógica. Según Frápolli:

Tentativamente, identificaré cinco concepciones de la lógica que han coexistido en los últimos 150 años, y que denotan aspectos y actividades distinguibles y no siempre compatibles:

- (1) *La concepción inferencialista*: la lógica es el aparato inferencial que gobierna nuestro sistema conceptual, i. e. es el aparato que permite conectar proposiciones mediante relaciones de implicación (e incompatibilidad).
- (2) *La concepción conceptográfica*: la lógica es un método de representación perspicua de argumentos.
- (3) *La concepción formalista*: la lógica es el conjunto de cálculos diseñados para representar relaciones de deducibilidad entre fórmulas que representan portadores de verdad.

(4) *La concepción meta-matemática*: la lógica es la disciplina que se ocupa de la fundamentación conjuntista de la matemática, o en general la disciplina que se ocupa de la metodología de las ciencias formales.

(5) *La concepción computacional*: la lógica es la disciplina que investiga los procedimientos mecánicos de razonamiento, la que fundamenta las ciencias de la computación. (Frápolli, 2019, p. 45)

Con base en estas cinco concepciones es posible tener una idea de las muchas actividades a las que se dedican los lógicos. En primer lugar, estudian la relación de validez entre premisas y conclusiones. En segundo lugar, buscan representar en lenguaje lógico toda expresión lingüística susceptible de formalización. En tercer lugar, elabora cálculos formales para modelar cierta manera de razonar o sacar conclusiones. En cuarto lugar, revisa y supervisa las propiedades metateóricas de las ciencias deductivas. Finalmente, en quinto lugar, pretende encontrar el funcionamiento de los procedimientos mecánicos utilizados para detectar la validez o invalidez de las inferencias. En esta ocasión nos centraremos en la segunda tarea pues representa un amistoso y fructífero cruce entre la lógica y la filosofía del lenguaje.

Frege fue quien analizó el lenguaje para encontrarle una base sólida e invariante. Él se dio cuenta que el mismo lenguaje incorpora principios, reglas y leyes que son tales que sin estos no tiene sentido la comunicación:

(...) Los portadores de propiedades y relaciones lógicas son los contenidos conceptuales, esto es, las proposiciones. Son las proposiciones las entidades a las que calificamos de verdaderas o

falsas; son las proposiciones las entidades que actúan como premisas y conclusiones de las inferencias que realizamos. Entre proposiciones se establecen las relaciones de implicación e incompatibilidad. De la proposición de que Claudio admira a Ángela se sigue que hay una mujer a la que Claudio admira. Quien afirme lo primero, pero niegue lo segundo se contradice y manifiesta una conducta irracional. Las oraciones “Dorotea es valiente” y “Dorotea es cobarde”, proferidas en el mismo contexto, expresan proposiciones incompatibles. Quien las apoye conjuntamente se contradice y manifiesta por tanto una conducta irracional. Coffa insiste en esta interpretación de Frege: “Está ampliamente aceptado que estos descubrimientos [la generalidad y la consistencia como funciones de orden superior] señalaron el nacimiento de la lógica moderna. Sin embargo, no eran más que productos marginales de una empresa mucho más fundamental que inspiró a Frege desde sus primeros escritos: una investigación del carácter de lo que decimos cuando transmitimos información, por medio de los juicios, no sólo de lo que de hecho decimos, sino de lo que podríamos decir o juzgar. Desde sus primeros escritos, la preocupación fundamental de Frege fue el significado o el contenido, lo que llamaba “lo lógico” –esto es, la semántica” (...). En efecto, no hay un Frege lógico que inaugura la lógica matemática formalista y un Frege semántico que inaugura la filosofía del lenguaje moderna. Hay un único Frege cuyo proyecto consiste en determinar las propiedades lógico-semánticas de los contenidos juzgables. (Frápolli, 2019, p. 48-49)

Así, el ‘significado’ estaría en el centro de los intereses de la lógica. Este es el mismo significado que se manifiesta tanto en las reglas lógicas como en el manejo del lenguaje y también en la comprensión de lo que quiere decir (y de todo aquello que implica aceptar) que algo sea verdadero. El problema es que, si aceptamos que el significado está en el centro de las preocupaciones de la lógica, los límites entre lógica y filosofía del lenguaje no se harían distinguibles sino intencionadamente difusos. Pero esto es tremendamente beneficioso para fines pedagógicos pues permite que el profesor de lógica pueda explicar sus contenidos sobre la base del conocimiento inicial de sus alumnos con respecto al lenguaje que usan para comunicarse.

Explicado el quehacer de los lógicos tenemos que ocuparnos de la relación con las paradojas. Consideramos que el uso de las paradojas en clase supone una preocupación por motivar la reflexión y la atención de los alumnos.

Pues bien, todo profesor que esté comenzando a desarrollar su labor docente siempre tendrá problemas para lograr concentrar la atención de sus pupilos en un aspecto concreto de la lección. Así pues, se hace necesario tener un as bajo la manga para poder llamar su atención con el fin no solo de amenizar la clase sino también para que sus alumnos puedan razonar como jugando con un rompecabezas.

Estando en una clase de lógica cualquiera que escuche la formulación de una paradoja siente una inmediata necesidad de encontrarle una falla o, en caso que no haya tal, buscarle una solución que desvanezca su aspecto problemático. A continuación, presentaremos

un caso en el que se pretende presentar una manera en la que un docente puede preparar el clima de una clase de lógica.

En lógica la regla más popular es la del *modus ponens*. Esta regla establece que a partir de un condicional y de la afirmación del antecedente podemos deducir el consecuente. Por ejemplo:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| 1. Si hago ejercicio entonces sudo. | 1. $p \rightarrow q$ |
| <u>2. Hago ejercicio</u> | <u>2. p</u> |
| C. Por tanto, sudo. | C. q |

En términos formales, esta regla se plantea de este modo: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$. ¿Podemos dudar o cuestionar esta regla tan aparentemente obvia? Pensemos en la paradoja de la inferencia planteada por Lewis Carroll:

Consideremos las siguientes premisas:

(A) Las cosas que son iguales a lo mismo son iguales entre sí.

(B) Los dos lados de este triángulo son iguales a un mismo segmento.

A partir de estas se puede deducir:

(Z) Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí.

Lo que sostiene A es que “si B entonces Z”. Así, A conjuntada con la afirmación B resulta en Z, por la aplicación del *modus ponens*. Sin embargo, un escéptico podría dudar de ello. Pues podría sostener que no estamos obligados a aceptar Z a partir de A y B a menos que antes concedamos que

(C): Si A y B son verdad, Z tiene que ser verdad.

Pero, si fuera así, entonces, no estamos obligados a aceptar Z a partir de A, B y C hasta que no concedamos primero que

(D): si A , B y C son verdad, Z tiene que ser verdad.

Y así hasta el infinito. De este modo, nunca llegaremos al punto en que estemos obligados a aceptar la conclusión de una inferencia válida cuyas premisas aceptamos y, por ende, no aceptaríamos la validez de ninguna inferencia. A la anterior situación se le conoce como “la paradoja de la inferencia” (Clark, 2009).

¿Cómo solucionamos este problema? Goldstein, Brennan, Deutsch y Lau (2008) sostienen que quien piensa como este escéptico realmente no entiende el uso del lenguaje y, en particular, el significado siquiera intuitivo de constantes lógicas tales como “si”, “entonces”, “y”, etc. Asimismo, de acuerdo a Pérez:

El diagnóstico usual señala la necesidad de distinguir entre reglas de inferencia y premisas en un argumento. Más específicamente, el sujeto que extrae cierta conclusión a partir de determinadas premisas de conformidad con una regla de inferencia no lleva a cabo su razonamiento apoyándose, ni implícita ni explícitamente, en una premisa que establece la validez de dicha regla. No es ése el modo en que se hace efectiva la regla de inferencia empleada. La regla no interviene como una proposición cuya ausencia haga inválido nuestro razonamiento; porque de ser así comienza el regreso infinito cuando nos preguntamos por la validez del nuevo argumento (el que incorpore como premisa adicional la regla de inferencia que respaldaba el argumento original). (Pérez, 2005, p. 7)

Para entender este asunto es importante ver las posibles premisas de esta paradoja de la siguiente manera:

1. B
2. $B \rightarrow Z$
3. $[B \wedge (B \rightarrow Z)] \rightarrow Z$
4. $(B \wedge (B \rightarrow Z) \wedge \{[B \wedge (B \rightarrow Z)] \rightarrow Z\}) \rightarrow Z$
5. $(B \wedge (B \rightarrow Z) \wedge \{[B \wedge (B \rightarrow Z)] \rightarrow Z\} \wedge [(B \wedge (B \rightarrow Z) \wedge \{[B \wedge (B \rightarrow Z)] \rightarrow Z\}) \rightarrow Z]) \rightarrow Z$

Analicemos esta estructura. Las premisas, de la tercera en adelante, contienen a las anteriores como antecedentes del condicional de mayor jerarquía. Sin embargo, si siempre se exige que para derivar Z se deba contar todos los antecedentes mencionados y, además, que se dude del *modus ponens*, derivar Z (o cualquier otra cosa) se volverá imposible. Podemos notar que la regla del *modus ponens* al ponerse como premisa (específicamente, la tercera premisa) plantea la confusión entre regla lógica y premisa, entre metalenguaje y lenguaje-objeto. Esta separación es importante pues las reglas que garantizan la validez de una inferencia no deberían ser consideradas como parte del cuerpo de premisas sino como una especie de guías para el razonamiento. Precisamente, la lógica estudia aquellas reglas y el hecho de cuestionar las propias reglas que garantizan la validez de una inferencia es cuestionar a la misma lógica.

Ante la paradoja anterior los alumnos harán uso de todas sus herramientas intelectuales con el fin de conseguir responder al reto planteado. Por ello, se entiende el impacto que causan las paradojas cuando son narradas pues invitan a poner en juego todo el ingenio y la capacidad mental de quien las comprenda. Sin embargo, más que un juego consideramos que la paradoja es un elemento esencial de la filosofía misma. Y no solo se trata de reproducir paradojas que otros han

realizado sino, más que nada, lo que se busca es elaborar uno mismo sus propias paradojas. Por eso, la filosofía podría ser definida como un lenguaje de paradojas. Como lo dice Kierkegaard, “el pensador sin paradoja es como el amante sin pasión: un mediocre modelo” (1997, p. 51)⁷⁴. Por definición, el que ama ha de tener pasión. Análogamente, el que piensa, e incluso estudia una carrera de filosofía, ha de tener paradojas filosóficas. Esto sucede porque siempre el que filosofa más que estar preparado para recibir las opiniones de los demás, debe ser el primero en plantearse sus propias críticas.

Asimismo, las paradojas han llevado a la creación de nuevas áreas del conocimiento, como el análisis matemático, la teoría de conjuntos, las lógicas paraconsistentes, entre otras. Y en ello radica la importancia de su investigación. Por ejemplo, en 1851 se publicó “Las Paradojas del Infinito” de Bernard Bolzano. En esta obra se analiza, entre otras, la siguiente serie:

$$R = a - a + a - a + a - a + a - \dots$$

⁷⁴ Enseguida, se comparte la cita completa:

Aunque Sócrates procuró con todas sus fuerzas reunir todo el saber del hombre y conocerse a sí mismo, y aunque a través de los siglos ha sido considerado como el hombre que mejor conoció al hombre, sin embargo confesó que la razón por la cual estaba poco dispuesto a pensar sobre la naturaleza de seres como Pegaso y las Górgonas era porque tampoco tenía muy claro si él mismo (conocedor del hombre) era un monstruo más extraño que Tifón o, por el contrario, un ser tan afable y simple que era partícipe por naturaleza de algo divino (...). Esto parece una paradoja. Pero no hace falta pensar mal de la paradoja, porque paradoja es la pasión del pensamiento y el pensador sin paradoja es como el amante sin pasión: un mediocre modelo. Pero la suprema potencia de la pasión es siempre querer su propia pérdida, la pasión suprema de la razón es desear el choque, aun cuando el choque se torne de uno u otro modo en su pérdida. Esta suprema pasión del pensamiento consiste en querer descubrir algo que ni siquiera puede pensar. (Kierkegaard, 1997, p. 51)

Esta serie tiene varias respuestas. La primera es considerarla “o” agrupando sus elementos de dos en dos. La segunda es considerarla “a” si dejamos libre el primer elemento y procedemos a agrupar sus elementos de dos en dos en adelante. La tercera es “ $\frac{1}{2}$ ” si factorizamos el signo negativo a partir del segundo elemento e identificamos ese segundo componente como igual a R. Incluso se puede probar que es indeterminada dividiendo R en una suma infinita positiva y en otra suma infinita negativa. Este problema motivaría el desarrollo del análisis infinitesimal, así como la aclaración del concepto de límite de una sucesión no monótona alternante u oscilante. Por este y otros motivos son tan importantes las paradojas.

2. Conociendo la paradoja de Curry

Una paradoja puede ser entendida como un argumento que en base a premisas inofensivas y aplicando reglas lógicas incuestionables llega a derivar una conclusión inaceptable. Existen muchas paradojas que han motivado reflexiones realmente profundas en el mundo académico. Piénsese, por ejemplo, en la paradoja de Cantor o la de Dios y la piedra. La primera relacionada a la teoría de conjuntos plantea la posibilidad de demostrar que tanto el conjunto universal como el conjunto potencia del conjunto universal mantengan relaciones contradictorias entre sí, es decir, que el primero contenga menos elementos que el segundo (por el teorema de Cantor) y, a la vez, que el primero tenga más o tantos elementos como el segundo (por la relación de inclusión). La segunda paradoja relacionada a cuestiones teológicas plantea la posibilidad de rechazar la omnipotencia de Dios sobre la base de preguntar si Dios

puede crear una piedra tan grande que ni siquiera él mismo sea capaz de cargar. Si la puede crear, ya no puede cargar y como no lo puede todo, no es omnipotente. Si no la puede cargar, no lo puede todo, por ende, no es omnipotente. En conclusión, Dios no es omnipotente y, a la vez, si es Dios, debería ser omnipotente⁷⁵.

En las anteriores paradojas estudiadas, un elemento importante a considerar es la cuestión de la contradicción. Siempre que hay paradojas, existe la sospecha de que puede haber contradicción (al menos con algunas de nuestras intuiciones más básicas). Pero esto no ocurre en el caso de la paradoja de Curry en la cual no hay tal. Precisamente, la complejidad de esta paradoja radica en que no parece contener contradicción, ni negación alguna: “B. Russell dedujo la mencionada inconsistencia [de las clases] mediante la ayuda de la noción de negación. Más tarde, H. B. Curry sostuvo que podríamos conseguir el mismo resultado sin la ayuda de esa noción. (...)” (Moh Shaw-Kwei, 1954, p. 37). Sin embargo, es posible a partir de ella probar cualquier cosa que se nos ocurra. Enseguida, se plantea la paradoja de Curry.

La expresión “c” denominada así en honor a Haskell Curry⁷⁶ (1942) representa formalmente a la siguiente expresión: “Si este condicional es verdadero entonces Perú es un país sudafricano”. Aquí está la prueba:

⁷⁵ La misma pregunta, pero dentro del marco teórico de la física es esta. Considerando que una fuerza irresistible es una a la que nada se le resiste y que un objeto inamovible es algo que nunca se moverá, ¿qué pasa cuando chocan ambos objetos? ¿puede una fuerza irresistible mover a un objeto inamovible?

⁷⁶ El matemático y lógico Haskell Brooks Curry (1900-1982), de origen norteamericano, fue profesor de diferentes universidades tales como Princeton, Harvard y Pensilvania. Se especializó en la lógica combinatoria la cual sirve como fundamento de los lenguajes de programación para la informática.

- | | |
|--|--|
| 1. $c = \text{"c" es verdadera} \rightarrow A$ | |
| 2. "c" es verdadera | Premisa Adicional |
| 3. $\text{"c" es verdadera} \leftrightarrow c$ | Esquema de Tarski (2) |
| 4. $\text{"c" es verdadera} \rightarrow c$ | Definición del Bicondicional, Simplificación (3) |
| 5. c | Modus Ponens (4,2) |
| 6. $\text{"c" es verdadera} \rightarrow A$ | Identidad (5,1) |
| 7. A | Modus Ponens (6,2) |
| 8. $\text{"c" es verdadera} \rightarrow A$ | Prueba Condicional (2-7) |

Hasta aquí se ha probado que el condicional presente en (1) es una fórmula demostrable o construible. Pero, si se sigue con la prueba, se puede llegar a demostrar A de modo independiente (Clark, 2009).

- | | |
|---|---|
| 9. c | Identidad (8,1) |
| 10. $\text{"c" es verdadera} \leftrightarrow c$ | Esquema de Tarski (9) |
| 11. $c \rightarrow \text{"c" es verdadera}$ | Definición del Bicondicional, Simplificación (10) |
| 12. "c" es verdadera | Modus Ponens (11, 9) |
| 13. A | Modus Ponens (12,8) |

Así, se ha logrado probar que "Perú es un país sudafricano". Sin embargo, también se podría haber probado que "Perú es un país americano" o cualquier cosa que se nos ocurriese sea verdadero o incluso falso. El asunto es que no se ha razonado ni sobre países ni sobre continentes y, a pesar de eso, se logra probar este enunciado en particular. Además, hay que fijarnos en que ni se usa una negación ni hay contradicción alguna. Esto es, precisamente, lo destacado de esta paradoja.

Hay que mencionar que esta paradoja mantiene una ligera (casi indetectable) relación con las paradojas de *El Mentiroso* y de Russell. Sin embargo, si por paradoja entendemos aquella situación de contradicción

en la que nos vemos involucrados cuando suponemos que de la verdad de un enunciado se deduce su falsedad y viceversa⁷⁷, hay que advertir que tal cosa no sucede en la paradoja de Curry.

En esta paradoja el problema se genera por un razonamiento que inicia aceptando la siguiente premisa:

Si tengo la razón entonces B.

Lo cual significa que

Si este enunciado es verdad entonces B.

Y, si le ponemos nombre a la anterior oración quedaría así:

$A = \text{Si este enunciado es verdad entonces } B$

Pero como el enunciado mencionado en el antecedente es todo el enunciado A, este quedaría así (considerando que “A es verdadero” es lo mismo que “A”)

$A = A \rightarrow B$

Esta fórmula (o sus análogas) serán conocidos como expresiones de Curry. Ahora bien, para mostrar lo que sucede con este argumento vamos a razonar, primero, suponiendo que es falso

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. $A = A \rightarrow B$ | |
| 2. A es falso | Premisa adicional |
| 3. $\sim A$ | Esquema simplificado de Tarski (2) ⁷⁸ |
| 4. $\sim (A \rightarrow B)$ | Identidad (1,3) |
| 5. $A \wedge \sim B$ | Definición del condicional y De Morgan (4) |

⁷⁷ En sentido técnico, la definición de Piscoya (1995, p. 205) y García Zárate (2007, p. 233) de paradoja es así: “Las paradojas son tipos especiales de contradicción [aquella dada por una oración] cuya verdad implica su falsedad, del mismo modo que su falsedad implica su verdad”.

⁷⁸ Bajo el esquema simplificado de Tarski, “A es falso” se representa como “ $\sim A$ ” (y viceversa) y “A es verdadero” como “A” (y viceversa).

- | | |
|--|------------------------------------|
| 6. A | Simplificación (5) |
| 7. A es verdadero | Esquema de simplificado Tarski (6) |
| 8. A es falso $\rightarrow$ A es verdadero | Prueba condicional (2-7) |

Por lo tanto, *si A es falso, entonces A es verdadero*. Así, aplicando la definición del condicional y el De Morgan a la expresión en cursivas se puede decir que dicho enunciado es verdadero.

Vamos a razonar, ahora, suponiendo que es verdadero

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $A = A \rightarrow B$ | |
| 2. A es verdadero | Premisa adicional |
| 3. A | Esquema simplificado de Tarski (2) |
| 4. $A \rightarrow B$ | Identidad (1,3) |
| 5. B | <i>Modus Ponens</i> (3,4) |
| 6. A es verdadero $\rightarrow B$ | Prueba condicional (2-5) |

Por lo tanto, si A es verdadero entonces B, es decir, de la verdad del enunciado de Curry podemos obtener una fórmula B cualquiera. Entonces del enunciado de Curry se pueden deducir dos cosas

(1) Si A es falso entonces A es verdadero

(2) Si A es verdadero entonces B

Pero (1) se reduce por aplicación de reglas lógicas a que

(1) *A es verdadero*

Y si lo juntamos con (2) obtenemos por *Modus Ponens*

(3) B

Es decir, que tomando como base a la expresión de Curry se puede deducir cualquier cosa. Insistimos en la idea de que en la paradoja de Curry no se deriva una contradicción. Sin embargo, lo que evidentemente sí hay es un conflicto en torno a la naturaleza de las derivaciones lógicas.

Sencillamente, no debería probarse cualquier cosa que se nos ocurra mediante un artificio tan simple como acomodar aquello que queremos probar en el consecuente de la estructura condicional autorreferida de la expresión de Curry. De hecho, a este problema se le conoce como trivialidad deductiva. (Barrero y Carnielli, 2005).

3. Tres paradojas relacionadas

Podemos entender a la paradoja como una expresión a partir de la cual uno puede razonar y deducir algo no convencional, según pautas previamente aceptadas desde cierto marco teórico. Esto ocurre con las paradojas de *El Mentiroso* y de Bertrand Russell. En el caso de *El Mentiroso*, la cuestión problemática se plantea a partir de la expresión que dice de sí misma que no es verdadera y en el caso de Russell el asunto polémico se origina con el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Primero, veamos la prueba de la paradoja de *El Mentiroso*. Asumimos que “m” es la expresión que afirma que m es mentira, es decir, una falsedad.

1. $m = \text{“m es falsa”}$

Vamos a suponer que m es verdadera.

2. m es verdadera Premisa Adicional

3. “m es falsa” es verdadera Identidad (1,2)

4. “m es falsa” es verdadera $\leftrightarrow$ m es falsa Esquema de Tarski (3)

5. “m es falsa” es verdadera $\rightarrow$ m es falsa Definición del Bicondicional, Simplificación (4)

6. m es falsa Modus Ponens (3,5)

7. m es verdadera $\rightarrow$ m es falsa Prueba Condicional (2-6)

Ahora, supongamos que m es falsa.

- | | |
|---|--|
| 8. m es falsa | Premisa Adicional |
| 9. “m es falsa” es verdadera $\leftrightarrow$ m es falsa | Esquema de Tarski (8) |
| 10. m es falsa $\rightarrow$ “m es falsa” es verdadera | Definición del Bicondicional, Simplificación (9) |
| 11. “m es falsa” es verdadera | <i>Modus Ponens</i> (8,10) |
| 12. m es verdadera | Identidad (11,1) |
| 13. m es falsa $\rightarrow$ m es verdadera | Prueba Condicional (8-12) |
- Finalmente, luego de conjuntar 7 y 13 podemos aplicar la definición del bicondicional para obtener
14. m es falsa $\leftrightarrow$ m es verdadera Conjunción, Definición del Bicondicional, (7,13)

Esta paradoja puede ser vista como un argumento que partiendo de premisas aceptables y aplicando reglas aceptables conduce a consecuencias inaceptables. Escribe Mora:

(...) en el caso de la paradoja de *El Mentiroso* las premisas aceptables serían:

- 1) Todo enunciado que tiene significado es verdadero o falso.
 - 2) La oración que dice de sí misma que es falsa tiene significado.
- y, la conclusión inaceptable sería:

C) Si la oración que dice de sí misma que es falsa, es verdadera entonces dicha oración es falsa, y si dicha oración es falsa, entonces ella misma sería verdadera. (Mora, 2014, pp. 20-21)

Entonces, una lección que nos enseña *El Mentiroso* es que deberíamos mirar con cierta desconfianza la autorreferencia de la falsedad de una oración o, en el caso de que se permita esto último, habrá que abandonar la bivalencia lógica, lo cual es sumamente problemático pues plantea la cuestión de cuál lógica no clásica es la más adecuada para

tratar con “m”. Ahora, prestemos atención a la formulación de la paradoja de Russell.

La paradoja de Russell surgía, afirma Mosterín (1980), de la aceptación de dos principios intuitivos. El primero afirma que para cada condición existe el conjunto de las cosas que satisfacen esa condición. El segundo afirma que todo conjunto es una cosa que puede ser elemento de otros conjuntos. Podemos formular el primer principio como afirmando que hay un conjunto y para cualquier x que cumpla la condición φ si y solo si los elementos de x pertenecen a y :

1. $(\exists y) (\forall x) [\varphi(x) \leftrightarrow x \in y]$ Axioma de comprensión

Hay muchos tipos de conjuntos. Una cualidad de los conjuntos podría ser la de no pertenecerse a sí mismo. Es una cualidad común en el mundo concreto y sensible. Por ejemplo, si en una bolsa ponemos lapiceros y asumimos que la bolsa es como el conjunto y los lapiceros son como sus elementos entonces este conjunto tendrá la propiedad de no pertenecerse a sí mismo, pues dicha bolsa solo contiene lapiceros y no a otras bolsas (ni menos a ella misma, desde luego). A Russell, precisamente, lo que le intriga es el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. Así pues, añadiendo como premisa la idea de que para cualquier z la condición φ equivale a la de no ser elemento de sí mismo, $z \notin z$, (he aquí el segundo principio en su forma negativa) obtenemos

2. $(\forall z) [\varphi(z) = z \notin z]$ Premisa
3. $\varphi(x) = x \notin x$ Especificación universal (2)
4. $(\exists y) (\forall x) (x \notin x \leftrightarrow x \in y)$ Identidad (1,3)

Llamando ‘ r ’, el conjunto de Russell, a tal y resulta que

5. $(\forall x) (x \notin x \leftrightarrow x \in r)$ Ejemplificación existencial (4)

Esto significa que los elementos de r son todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. Y sustituyendo x por r se obtiene que

6. $r \notin r \leftrightarrow r \in r$ Ejemplificación universal (3)

Esta última fórmula expresa la contradicción hallada por Russell.

Analicemos y comparemos ambos casos. Mediante la paradoja de *El Mentiroso* se llega a establecer que una cierta expresión puede ser verdadera como falsa y en el caso de Russell, que un conjunto se contiene y no se contiene a sí mismo.

Para la primera paradoja se ha ideado una manera de hacerle frente. Nos referimos a la teoría de los metalenguajes planteada por Tarski (1997). De acuerdo a esta propuesta, la paradoja de *El Mentiroso* (que afirma que hay una oración A , tal que $A=A$ es falsa) cae en el error de predicar falsedad de un enunciado en un nivel superior (" A es falsa" es parte del metalenguaje) desde un enunciado en un nivel inferior del lenguaje (" A " es parte del lenguaje-objeto). El asunto es que tanto el primer enunciado " A es falso" como el segundo " A " son el mismo. Esto provoca una confusión de niveles. La paradoja se deshace exigiendo que se cumpla la prerrogativa de que se respete el orden de los diferentes niveles y no se les mezcle.

Para la segunda paradoja se tiene una estrategia interesante. Para este fin se alude a la teoría de los tipos de Russell. Según su propuesta, la paradoja de Russell (1910) cae en el error de atribuir la capacidad de ser contenido a un conjunto cuando son estos los que, más bien, pueden contener otras cosas (y no a otros conjuntos). Así pues, los conjuntos y los elementos tienen tipos (o niveles) diferentes y no deben mezclarse. La

paradoja se deshace de modo más evidentemente formal, si damos cuenta del sistema axiomático de Zermelo (1908) que expuso en su trabajo “Investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos”⁷⁹. En este sistema, se pueden detener las consecuencias desastrosas del conjunto problemático de Russell conjuntándolo con una condición previa.

Ahora bien, estamos ante una paradoja muy controversial: la paradoja de Curry. El matemático y lógico norteamericano Haskell Curry formuló su paradoja en los siguientes términos:

Teorema. Si $\mathcal{S}$ es un sistema combinatoriamente completo en el cual hay una operación de implicación $\supset$ tal que, para términos arbitrarios $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$,

I. $\vdash \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$,

II. $\vdash \mathfrak{M} \supset. \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N} \rightarrow. \vdash \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$,

III. $\vdash \mathfrak{M} \ \& \ \vdash \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N} \rightarrow. \vdash \mathfrak{N}$,

luego cada término de $\mathcal{S}$ es una aserción.

La prueba del siguiente teorema depende del siguiente lema.

Lema: Si $\mathcal{S}$ es como en el teorema y si $\mathfrak{B}$ es un término tal que hay un término $\mathfrak{U}$ para el cual $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}$, luego $\mathfrak{B}$. (Curry, 1942, pp. 115-117)⁸⁰

Ahora estamos en condiciones de explicar la razón por la que se mencionó a las paradojas de *El Mentiroso* y de Russell antes de presentar

⁷⁹ Zermelo justifica su Axioma de Separación aseverando que la noción de conjunto sólo permite la construcción de conjuntos si se hace a partir de otros conjuntos previamente establecidos. Esa es la noción acumulativa de conjunto.

⁸⁰ Prior (1955) publicó una versión intuitiva de esta paradoja de tal modo que parezca una demostración de la existencia de Dios, aunque en realidad con esta paradoja se puede probar cualquier cosa.

esta paradoja. Se ha notado que la de Curry guarda cierta familiaridad con estas⁸¹. De este modo, la paradoja de Curry se parece a la de *El Mentiroso* porque ambas son autorreferentes. Y se parece a la de Russell porque también tiene una versión conjuntista (Bobenrieth, 1996) (Rescher, 2001), la cual procedemos a exponer, señalando previamente que * alude a la expresión $\psi x = [(x \in x) \rightarrow a]$.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $(\exists y) (\forall x) (x \in y \leftrightarrow \psi x)$ | Axioma de comprensión |
| 2. $(\exists y) (\forall x) [x \in y \leftrightarrow (x \in x \rightarrow a)]$ | Identidad (1, *) |
| 3. $(\forall x) [x \in c \leftrightarrow (x \in x \rightarrow a)]$ | Ejemplificación existencial (2) |
| 4. $c \in c \leftrightarrow (c \in c \rightarrow a)$ | Ejemplificación universal (3) |
| 5. $[c \in c \rightarrow (c \in c \rightarrow a)] \wedge [(c \in c \rightarrow a) \rightarrow c \in c]$ | Definición del bicondicional (4) |
| 6. $c \in c \rightarrow (c \in c \rightarrow a)$ | Simplificación (5) |
| 7. $(c \in c \rightarrow a) \rightarrow c \in c$ | Simplificación (5) |
| 8. $c \in c \rightarrow a$ | Contracción (6) ⁸² |
| 9. $c \in c$ | <i>Modus Ponens</i> (7,8) |
| 10. a | <i>Modus Ponens</i> (8,9) |

Otro parecido es que las soluciones dadas a las paradojas mencionadas se aplican también con éxito a la paradoja de Curry. Sin embargo, la paradoja de Curry se distingue de las otras mencionadas en que mientras que estas contienen negaciones y conducen a una contradicción, la de Curry no usa negaciones ni desemboca en una

⁸¹ Además, han sido materia de dos tesis anteriores preparadas por el autor. En la de licenciatura se estudia la paradoja de *El Mentiroso* (Mora, 2014) y en la de maestría, la de Russell (Mora, 2016).

⁸² La contracción en lógica se plantea de este modo: $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$. Investigadores como Bacon (2011) y Meyer, Routley y Dunn (1979) han llamado la atención sobre la presencia de la contracción. Incluso han derivado la paradoja de Curry haciendo uso exclusivo de esta regla lógica.

contradicción; no obstante, sí existe trivialización deductiva pues se logra demostrar cualquier fórmula. Esto es lo llamativo y lo que hace única a la paradoja de Curry.

Sin embargo, el hecho de ser única no debe llevarnos a pensar que no tiene nada que ver con las mencionadas paradojas. Por ejemplo, según Goldstein (1986), la paradoja de Epiménides (ligeramente relacionada con la de *El Mentiroso*) y la de Curry pueden ser analizadas en forma análoga. Asimismo, de acuerdo a Rescher (2001), la paradoja de Curry es una variante de la de Russell desde el punto de vista de que utiliza la problemática relación de autopertenencia analizada por el lógico inglés.

Como ya sabemos, esta paradoja se plantea aceptando un condicional de la forma “Si A es verdad entonces B” donde A es el nombre de toda la anterior condicional. Haciendo razonamientos lógicos con esta estructura es posible llegar a probar que B. Esto se interpreta como que dicha oración de Curry permite probar cualquier cosa que hayamos puesto como consecuente, lo cual implica que se ha caído en una trivialización deductiva, pero sin caer en una contradicción. Una vez más, esto es lo profundamente inquietante.

Con respecto a lo anterior, se manifiesta que un lenguaje formal es adecuado deductivamente si, al no contener contradicciones, implica ciertas cosas y no otras o, en otras palabras, que un cálculo es adecuado deductivamente si y sólo si este contiene al menos una fórmula bien formada que no sea uno de sus teoremas, es decir, que no esté siendo implicada por el sistema lógico. Por el contrario, los que implican cualquier proposición (y, ocasionan que cualquier fórmula construable en el sistema sea también un teorema) son trivialmente deductivos.

Entonces, el problema con la paradoja de Curry radica en que entra en conflicto con la exigencia de que un sistema lógico no sea trivialmente deductivo (Barrero y Carnielli, 2005)⁸³. Lo siguiente aclara este punto:

Ahora bien, antes de continuar habría que indicar que, a pesar de los parecidos, la paradoja de Curry no es paradójica en el mismo sentido en que lo son las paradojas del Russell y de *El Mentiroso*. Sucede que de la paradoja de Curry no se deduce alguna contradicción como la señalada en las otras paradojas. Lo que se logra deducir es una expresión derivable lógicamente del sistema anterior sin haber contradicción previa. Según Rescher: “una paradoja (...) surge cuando las premisas plausibles implican una conclusión cuya negación también es plausible”. (Rescher, 2001, p.6). ¿Cómo así es paradójica la paradoja de Curry? Lo que sucede es que el hecho de que sea deducible cualquier enunciado a partir de una expresión dada no contradictoria entra en conflicto con nuestra idea original de lo que es un sistema lógico. La afirmación “Todo puede ser deducible a pesar de que no hay contradicción” que identifica a la paradoja de Curry, es algo que normalmente no aceptaríamos como un rasgo de un sistema lógico. Más bien, tendemos a pensar que “No todo puede ser deducible a menos que haya contradicción”, es decir, si todo puede ser deducible entonces

⁸³ Antes se consideraba que el asunto involucrado era la inconsistencia absoluta pero dado que el concepto de inconsistencia involucra el de negación y contradicción, el fenómeno que acaece en la paradoja de Curry debe ser designado con un término más exacto pues en el caso de Curry no hay negación ni contradicción. “Trivialidad deductiva” es el más adecuado pues este alude a la situación en la que a partir de una premisa A se obtiene toda fórmula B mediante la aplicación de reglas y equivalencias de inferencia y sin que interese el valor veritativo de B (pudiendo ser verdadero o falso).

hay contradicción. Pero, en la paradoja de Curry “todo puede ser deducible a pesar de que no hay contradicción”. En este particular sentido, la paradoja de Curry es una paradoja no porque arroje contradicciones sino porque supone un conflicto entre nuestra idea del requisito que debería cumplir un sistema lógico y el que se puede probar (con un argumento muy sencillo) que de hecho cumple. (Mora, 2020a, pp. 9-10)

Una cuestionada estrategia para enfrentar esta paradoja fue planteada por Łukowski en *Paradoxes* (Łukowski, 2011). La frase paradójica en cuestión tiene la forma: $C \leftrightarrow (C \rightarrow i)$, donde asumimos que i es una oración cualquiera, pero con valor indeterminado: puede ser verdadera o puede ser falsa (pero tiene alguno de esos valores). Para poder simplificar los razonamientos que siguen aplicaremos la siguiente equivalencia: $C \leftrightarrow (\sim C \vee i)$. Enseguida, le aplicamos una conjunción al miembro derecho con el objetivo de frenar las consecuencias problemáticas de esta paradoja: $C \leftrightarrow [(\sim C \vee i) \wedge X]$

Tabla 1***Propuesta de solución de Łukowski***

$C \leftrightarrow [(\sim C \vee i) \wedge X]$		
V	(i	$\wedge X)$
F	(V	$\wedge X)$

Fuente: Mora, 2020a, pp. 44.

Si nos contentamos con un razonamiento que parte de la suposición de que C es verdadera, llegaremos a una contingencia. El problema real sólo aparece cuando se argumenta desde C , si hemos considerado que se trata de un enunciado falso. Y, como hemos constatado, para Łukowski, bastaría con conjuntarle una proposición falsa a la condicional anterior para que la expresión A de Curry sea solamente una falsedad⁸⁴. Independientemente de si esta propuesta de disolución es aceptable o no, debe señalarse que, desde esta perspectiva, la paradoja de Curry puede ser vista como una advertencia para no inferir a partir de premisas falsas. El asunto es que esta propuesta encaja dentro de un punto de vista clásico. Consideramos que es productivo entender

⁸⁴ Para comprender este procedimiento, recurriremos a la propuesta de Zermelo con respecto a la paradoja de Russell. Como sabemos, esta paradoja parte de aceptar el conocido axioma de comprensión:

$(\exists B) (\forall x) (x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$

En vez de ello, Zermelo lo reformula y lo sustituye por el siguiente axioma de separación:

$(\forall A) (\exists B) (\forall x) [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$

Como podemos notar lo que se ha hecho es conjuntarle a la condición $\varphi(x)$ otra expresión. Algo análogo se ha aplicado al caso de la oración de Curry.

cómo se desarrolla esta paradoja desde la lógica clásica. Pero, lo más interesante es ver este tema a partir de una óptica no clásica. Desde este último enfoque el tema se vuelve más interesante a nivel lógico y filosófico porque las interpretaciones sobre lo que implica la paradoja de Curry dentro de esos sistemas puede iluminar aspectos cognitivos ocultos en términos de lógica clásica.

4. La paradoja de Curry bajo las lupas clásica y no-clásica

La paradoja de Curry se ha estudiado desde diversos puntos de vista. Pero, son los no-clásicos los que resultan especialmente atractivos. Dado que la paradoja en mención no cae en contradicción, pero sí produce trivialidad deductiva se ha considerado que merece un análisis especial.

Antes de ello, prestaremos atención al análisis clásico. En primer lugar, la versión semántica de la paradoja de Curry puede ser extraída desde la paradoja de *El Mentiroso*. Por ejemplo, Cook (2013), redefiniendo la negación y partiendo de la expresión de *El Mentiroso* deriva una versión de la paradoja de Curry cuando el consecuente es una falsedad. Sin embargo, la expresión de Curry (**Si este condicional es verdadero entonces B**) puede ser derivada de la de *El Mentiroso* de este modo. Sea M la expresión “M es falsa” (1). Aquí nos damos cuenta de que la paradoja de *El Mentiroso* es producto de una oración negada (en cuanto a su valor de verdad) y autorreferida. *El Mentiroso* es una negación autorreferida que básicamente dice “ $\sim M$ es verdad”. Si aplicamos la adición a (1) tendríamos “M es falsa o B” (2), pero recordemos que toda la expresión es M. Por ende, lo que tenemos es una

expresión que dice: “Esta disyunción es falsa o B”, es decir, estamos ante una disyunción autorreferida. Volvamos a (2). Si aplicamos definición del condicional obtendríamos “Si M es verdad entonces B” (3), pero recordemos que toda la expresión es M. Por ende, lo que tenemos es una expresión que dice: “Si este condicional es verdadera entonces B”. Esto es importante, pues se ha podido ver dos asuntos. El primero es que la expresión de Curry se puede derivar de la de *El Mentiroso*, pero no es su equivalente. El segundo es que la expresión equivalente de Curry después de todo sí contiene una negación (pero no como un operador principal), si consideramos que (2) y (3) son lo mismo⁸⁵.

En segundo lugar, el enunciado de Curry se construye sobre la base de que A es una afirmación que dice que, si A es cierta entonces B, es decir, $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$. Priest (2006) también admite que, básicamente, esta es la forma del enunciado de Curry. Efectuemos algunas reglas lógicas de equivalencia sobre el enunciado de Curry usando el bicondicional para evaluar su comportamiento.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ | |
| 2. $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \wedge [(A \rightarrow B) \rightarrow A]$ | Definición del bicondicional (1) |
| 3. $[\sim A \vee (\sim A \vee B)] \wedge [\sim (\sim A \vee B) \vee A]$ | Definición del condicional (2) |
| 4. $(\sim A \vee B) \wedge [\sim (\sim A \vee B) \vee A]$ | Asociativa, Idempotencia (3) |
| 5. $(\sim A \vee B) \wedge [(A \wedge \sim B) \vee A]$ | De Morgan (4) |
| 6. $(\sim A \vee B) \wedge A$ | Absorción (5) |
| 7. $B \wedge A$ | Absorción (6) |
| 8. $A \wedge B$ | Conmutativa (7) |

⁸⁵ Esto arroja la cuestión de si podemos aplicar reglas lógicas clásicas a enunciados autorreferidos. Sin embargo, este asunto excede los límites de esta investigación.

De este modo, el enunciado de Curry puede ser reducido a $A \wedge B$, es decir, la verdad de $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ coincide con la verdad de $A \wedge B$. Y si aplicamos simplificación y nos quedamos con B , podemos decir que de la expresión de Curry se implica su consecuente⁸⁶.

Realizaremos un análisis semántico en torno a la idea de considerar la identidad $A=(A \rightarrow B)$. El condicional material tiene una serie de leyes vinculadas a la tautología y la contradicción que puedan ocurrir en sus consecuentes o antecedentes.

1. Si tenemos que la fórmula (α) es $A \rightarrow B$ y A es verdad, entonces (α) se reduce a B .
2. Si tenemos que la fórmula (α) es $A \rightarrow B$ y A es falso, entonces (α) se reduce a una tautología.
3. Si tenemos que la fórmula (α) es $A \rightarrow B$ y B es verdad, entonces (α) se reduce a una tautología.
4. Si tenemos que la fórmula (α) es $A \rightarrow B$ y B es falso, entonces (α) se reduce a $\sim A$.

Como notamos en ninguna circunstancia la expresión $A \rightarrow B$ se reduce a A tal y como lo plantea la identidad $A=(A \rightarrow B)$. Esto explica en parte por qué la aceptación de esta identidad *contranatura* con respecto a las condiciones veritativas del condicional, genera problemas como la trivialidad deductiva.

En tercer y último lugar, ahora bien, tras una evaluación nos podremos percatar que dicho esquema presenta cierta ciclicidad si se

⁸⁶ Este detalle será importante cuando nos acerquemos al enfoque pragmático de la paradoja de Curry, pues apoyará la idea de que la paradoja de Curry es, en realidad, una conjunción disfrazada de condicional.

analizan las distintas iteraciones de $A = (A \rightarrow B)$ en $A \rightarrow B$. Esto haría que nuestra $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ se convierta en $A \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B]$ y después en $A \leftrightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\}$ y así sucesivamente (siendo esta la forma general de la oración paradójica: $A \rightarrow_{n+1} B$ equivale a $(A \rightarrow_n B) \rightarrow B$, donde $A \rightarrow_0 B$ equivale a A).

Para mostrar esto, evaluaremos y analizaremos la expresión de Curry iterando, es decir, repitiendo la identidad en cuestión al menos 3 veces dentro del segundo miembro de la identidad. Partimos de aceptar que $A = A \rightarrow B$.

I. $A \rightarrow B$ (0 iteraciones)

En I reemplazamos y obtenemos

II. $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ (1 iteración)

Nuevamente, en II reemplazamos

III. $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B$ (2 iteraciones)

Finalmente, en III reemplazamos

IV. $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\} \rightarrow B$ (3 iteraciones) ⁸⁷

En I. $A \rightarrow B$ podemos aplicar la definición del condicional y obtenemos

$\sim A \vee B$

Pero, como sabemos que todo esto equivale a A tenemos

⁸⁷ En un artículo de Restall y Rogerson (2004), se juega con la forma lógica de este tipo de expresiones. Así, por ejemplo, sea $A \rightarrow_0 B$ equivalente a A y sea $A \rightarrow_{n+1} B$ equivalente a $(A \rightarrow_n B) \rightarrow B$. De tal modo que, cuando $n=0$, $A \rightarrow_1 B$ sería equivalente a $(A \rightarrow_0 B) \rightarrow B$, es decir, a $A \rightarrow B$, y cuando $n=1$, $A \rightarrow_2 B$ sería equivalente a $(A \rightarrow_1 B) \rightarrow B$, es decir, a $(A \rightarrow B) \rightarrow B$. Y así sucesivamente veremos cómo ese condicional de Curry se vuelve más y más extenso dado que $A = A \rightarrow B$. Es importante decir que este procedimiento ya se encuentra en Moh Shaw-Kwei (1954) solo que con nomenclatura distinta y antigua. También este uso se encuentra en Robles y Méndez (2014).

$$(\sim A \vee B) = A$$

B no puede ser falso, pues si fuera así tendríamos

$$\sim A = A$$

Lo cual es inaceptable. Por ende, B es verdadero y también A es verdadero.

En II. $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ podemos aplicar la definición del condicional y obtenemos

$$\sim (\sim A \vee B) \vee B$$

Lo cual mediante De Morgan resulta

$$(A \wedge \sim B) \vee B$$

Ahora, aplicando absorción nos queda

$$A \vee B$$

Pero, como sabemos que esto equivale a A tenemos

$$(A \vee B) = A$$

Analícemos. Si B fuera verdadera entonces A sería verdadera. Si B fuera falso entonces tendríamos una tautología

$$A = A$$

Y A puede ser o verdadero o falso, sin caer en ninguna contradicción.

Hay que señalar que para el caso III el análisis de I es idéntico y, análogamente, para el caso IV el análisis de II es el mismo. Específicamente, es posible notar que los resultados veritativos se repiten tras un análisis lógico reiterado, pues para cuando n es par tenemos unos valores veritativos y para cuando n es impar tenemos otros valores veritativos.

Sin embargo, más allá de esto no nos es posible seguir. Por ello, volcamos nuestra atención a la propuesta de la lógica paracompleta y la lógica paraconsistente, esperando obtener ciertas pistas acerca de cómo lidiar con esta paradoja. De acuerdo a Beall y Murzi:

Muchos han pensado que la notable paradoja del mentiroso puede ser resuelta ajustando nuestra teoría de (las reglas que gobiernan) la negación. Quizás, como en las comunes opciones *paracompletas*, la negación no puede ser exhaustiva: no logra clasificar enunciados bien como verdaderos o no verdaderos, permitiendo así ‘vacíos’ (*‘gaps’*) entre la verdad y la falsedad. Quizás, como en las comunes opciones paraconsistentes, la negación no puede ser exclusiva: le permite a los enunciados estar ‘saturados’ (*‘glutty’*), o son ambos verdaderos y falsos. Pero mientras que la paradoja del mentiroso puede ser detenida mediante una teoría no-clásica de la negación, la paradoja de Curry surge incluso en lenguajes libres-de-negación, y en particular en esas teorías que disfrutan de los principios semánticos fundamentales irrestrictos para la verdad (es decir, T-bicondicionales) o la ejemplificación (es decir, comprensión ingenua). El desafío principal para tales teorías es la paradoja de Curry. (Beall y Murzi, 2013, pp. 143-144)

Por un lado, la lógica paracompleta se basa en la idea de vacíos de verdad (*‘gaps’*). Para entender esto, pensemos en lo que ocurriría con la siguiente oración (Gamut, 2004):

(1) Mañana lloverá, que simbolizaremos con la letra

(1') ϕ

Pues bien, pensemos en lo que sucedería si dicha oración fuera verdadera o falsa.

(α) Si hoy la oración ya fuera verdadera, entonces necesariamente mañana lloverá. Formalmente:

(α') $\phi \rightarrow \Box \phi$

(β) Si hoy fuera falsa, entonces sería imposible que mañana llueva (es decir, es necesario que no llueva). Formalmente:

(β') $\sim \phi \rightarrow \Box \sim \phi$

Pero, de acuerdo a la lógica clásica en la que se cumplen los tres principios lógicos.

(γ) La oración es verdadera o falsa (por tercio excluso). Formalmente:

(γ') $\phi \vee \sim \phi$

En conclusión, aplicando el dilema constructivo⁸⁸:

(δ) Por lo tanto, es necesario que llueva o es necesario que no llueva. Formalmente

(δ') $\Box \phi \vee \Box \sim \phi$

De este modo, considerando que (1) es algo contingente no se entiende como ya está decidido de modo necesario tal o cual característica climática. Así, serían falsas (e inaceptables) tanto ϕ como $\sim \phi$. Por ello, habría vacío de verdad. Y tampoco se respetaría el principio del tercio excluso que sostiene que $\sim A \vee A$. Ahora bien, resulta

⁸⁸ Según este dilema: $[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C)] \rightarrow (B \vee D)$.

interesante constatar que a partir de la aceptación de (*) $A = A \rightarrow B$ y del principio del tercio excluido se puede llegar a la trivialidad deductiva que se ha constatado con la paradoja de Curry.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\sim A \vee A$ | Principio del tercio excluido |
| 2. $\sim A \vee (A \rightarrow B)$ | Identidad (1,*) |
| 3. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | Definición del condicional (2) |
| 4. $A \rightarrow B$ | Contracción (3) |
| 5. A | Identidad (4,*) |
| 6. B | <i>Modus Ponens</i> (4,5) |

Field (2008) planteó un riguroso procedimiento para enfrentar a la paradoja de Curry. Nosotros nos ayudaremos de una versión simplificada elaborada por Pailos:

(...) Para obtener los restantes miembros de la secuencia de valuaciones para condicionales aplicamos una regla de revisión que le asigna el valor 1 al condicional $A \rightarrow B$ si a partir de algún punto de la secuencia de *puntos fijos* el valor de A es menor o igual al valor de B . Por otra parte, para obtener cada miembro de la secuencia de puntos fijos aplicamos las cláusulas de K_3 (lógica trivaluada de Kleene) junto con el hecho de que Tr es transparente. El *valor último* de una fórmula A del lenguaje L , que se interpreta, esto es, el valor semántico que finalmente adquiere la fórmula en la semántica que estamos presentado, está dado por los puntos fijos kripkeanos. Para determinar el valor último de A es necesario indicar en qué valor se estabiliza (si es que en alguno). Utilizaremos la letra P para designar las valuaciones que son puntos fijos y la letra S para designar las

valuaciones para los nuevos condicionales. Estipulamos que en la valuación S_0 el valor de $A \rightarrow B$ es $\frac{1}{2}$ para cualquier A y cualquier B de L , y que P_0 es el punto fijo mínimo de Kripke. Esta combinación de revisión y puntos fijos involucra tres procedimientos distintos. El primero es el que nos permite pasar de cada S_α a P_α . El segundo es el que nos permite construir cada S_α a partir de P_α previos. Tendremos instrucciones distintas para ordinales sucesores y ordinales límite. Por último, es necesario establecer cómo este proceso determina los valores semánticos de las oraciones, lo que antes llamé *valor último*. (Pailos, 2014, pp. 43-44)

De este modo, en base a una maquinaria técnica compleja se logra decretar un valor medio a la paradoja de Curry: no es verdadera ni falsa. Escribe Pailos:

La noción de validez queda definida a partir del concepto de valor último. Una fórmula A es válida si y solo si su valor último es un valor designado, donde el único valor designado es 1. A su vez, una inferencia es válida si y solo si preserva el valor designado. Ya hemos visto que la oración de Curry C varía entre 1 y 0 en todos los ordinales sucesores (más precisamente tiene 0 en ordinales sucesores impares y 1 en ordinales sucesores pares) y adquiere valor $\frac{1}{2}$ en todos los ordinales límite. De esto se sigue que $|C| = \frac{1}{2}$. Este es el diagnóstico correcto para la oración de Curry, ya que intuitivamente no es verdadera ni falsa (...). (Pailos, 2014, p. 46)

La solución que ofrece la propuesta de Field nos lleva a considerar que la expresión que da lugar a la paradoja de Curry no tiene un valor de verdad clásico, es decir, es indeterminada (indefinida, incierta, insegura o desconocida). Desde la lógica paracompleta (específicamente, la lógica trivaluada de Kleene (1938) junto al análisis kripkeano de los puntos fijos (Kripke, 1975) y la teoría revisionista de la verdad (Gupta y Belnap, 1933)), la expresión de Curry no genera problemas de trivialidad deductiva porque su valor de verdad no es ordinario, es decir, no es verdadera ni falsa sino que, más bien, al romper el principio del tercio excluso evita que uno pueda razonar sobre ella suponiendo que su valor veritativo debe ser de uno u otro tipo.

Así, este tercer valor de verdad abre la posibilidad que no se genere trivialidad deductiva puesto que ante el vacío de verdad (o una verdad ‘indecidible’) la idea de la lógica como de aquello que sirve para transmitir el valor veritativo de las premisas a la conclusión (y, a la vez, que sirve para impedir que se derive una falsedad a partir de una verdad), podría explicar (pero no justificar) el hecho de obtener una conclusión cualquiera si partimos de una premisa cuyo valor de verdad sería indecible. Esto significa que no necesariamente se implicaría la posibilidad de probar cualquier cosa que se nos ocurra con un carácter de verdadero puesto que nuestro punto de partida no tiene un valor de verdad determinado. En todo caso, lo probado podría ser calificado de indecible o alguna otra etiqueta acorde con una lógica trivaluada.

Por otro lado, la lógica paraconsistente se basa en la idea de saturaciones de verdad (*‘glutty’*). Para entender esto, pensemos en la siguiente cuestión. El fenómeno de la vaguedad permite que una cosa

posea y no posea un mismo predicado vago. Esto ocurre cuando pensamos en la definición de “niño”. ¿Cuándo el niño deja de ser niño y pasa a convertirse en un joven mayor de edad? Si se pasa 1 segundo, el niño sigue siéndolo; si pasan 2, sigue siendo niño, si pasan 3 sigue siendo niño; y así sucesivamente... podemos decir, entonces, que pasaran muchos segundos y seguirá siendo niño (A). Pero, a la vez, es obvio que en algún momento dejará de ser niño ($\sim A$).

Por ello, habría saturación de verdad: tanto A como $\sim A$ son ambas verdaderas. Así, surge el concepto de *dialetheia*: una expresión con valor veritativo de verdad y falsedad. Una consecuencia de la *dialetheia* es que afecta el razonamiento denominado *Modus Ponens* y, así, si alguien deduce B a partir de A y $(A \rightarrow B)$, uno obtendría una conclusión no verdadera (pues B podría ser una *dialetheia*) a partir de premisas verdaderas. Esto significa que aplicando el MP se obtendría un razonamiento inválido. (M. Carrara y E. Martino, 2011). Resulta interesante constatar que a partir de la aceptación de (*) $A = A \rightarrow B$ y de la ley del *Modus Ponens* se puede llegar a la trivialidad deductiva planteada en la paradoja de Curry.

- | | |
|---|---|
| 1. $[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$ | Ley del <i>Modus Ponens</i> |
| 2. $(A \wedge A) \rightarrow B$ | Identidad (1,*) |
| 3. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | Exportación (2) |
| 4. $A \rightarrow B$ | Contracción (3) |
| 5. A | Identidad (4,*) |
| 6. B | <i>Modus Ponens</i> (4,5) ⁸⁹ |

⁸⁹ Una prueba análoga a esta aparece en Meyer, Routley y Dunn (1979).

Graham Priest (2006) rediseña el concepto de condicional y lo aplica para relacionar mundos normales y no normales. Ahora bien, para mundos normales, tenemos que:

$1 \in v(A \rightarrow B, w) \leftrightarrow$ para todo mundo $w' \in W$, si $1 \in v(A, w')$, entonces $1 \in v(B, w')$

$0 \in v(A \rightarrow B, w) \leftrightarrow$ para algún mundo $w' \in W$, $1 \in v(A, w')$ y $0 \in v(B, w')$ ⁹⁰

Y para mundos no normales la cláusula es la siguiente:

$1 \in v(A \rightarrow B, w) \leftrightarrow$ para todo par de mundos $\langle w', w'' \rangle$ tal que $wR\langle w', w'' \rangle$, si $1 \in v(A, w')$, entonces $1 \in v(B, w'')$.

$0 \in v(A \rightarrow B, w) \leftrightarrow$ para algún par de mundos $\langle w', w'' \rangle$ tal que $wR\langle w', w'' \rangle$, $1 \in v(A, w')$ y $0 \in v(B, w'')$.⁹¹

De este modo, le hace frente a la paradoja de Curry. Aunque nos compromete con el concepto de “mundos no normales”. Explicaremos brevemente este concepto señalando que un mundo no normal es aquel en el que las reglas lógicas no son necesariamente verdaderas (Priest, 1992). La sola idea de que el *Modus Ponens* no se cumpla va en sintonía con este planteamiento. Así, por ejemplo, en un mundo no normal la expresión “Todo es rojo o no es rojo” no sería verdadera de forma necesaria. Si ya es complicado imaginar cómo sería un mundo así, resulta

⁹⁰ Lo anterior se puede leer así:

1 pertenece a la valuación de $A \rightarrow B$ en el mundo w si y solo si para todo mundo w' que pertenece al conjunto de índices de mundos posibles W , 1 pertenece a la valuación de A en w' y 0 pertenece a la valuación de B en w' .

0 pertenece a la valuación de $A \rightarrow B$ en el mundo w si y solo si para algún mundo w' que pertenece al conjunto de índices de mundos posibles W , si 1 pertenece a la valuación de A en w' , entonces 1 pertenece a la valuación de B en w' .

⁹¹ Lo anterior se puede leer así:

1 pertenece a la valuación de $A \rightarrow B$ en el mundo w si y solo si para todo par de mundos de la dupla $\langle w', w'' \rangle$ tal que w tiene una relación R con dicha dupla, si 1 pertenece a la valuación de A en w' entonces 1 pertenece a la valuación de B en w'' .

0 pertenece a la valuación de $A \rightarrow B$ en el mundo w si y solo si para algún par de mundos de la dupla $\langle w', w'' \rangle$ tal que w tiene una relación R con dicha dupla, 1 pertenece a la valuación de A en w' y 0 pertenece a la valuación de B en w'' .

una tarea sumamente técnica (véanse las complejas fórmulas de arriba) el de plantear las relaciones lógicas que gobiernan esos mundos no normales. El hecho es que los condicionales tienen valores de verdad en un mundo posible siempre y cuando sus componentes puedan tener valores de verdad en otros distintos mundos posibles y que estas relaciones entre sus componentes sean reglamentadas. Desde luego, al no permitir el *Modus Ponens* debido a esta modificación en el condicional lógico entonces la deducción de B no se produciría.

La idea detrás de estos tecnicismos es que lo necesario es parte del orden conceptual de tal o cual mundo. Dado ciertos conceptos previamente definidos se deducen ciertas relaciones de necesidad. Ahora bien, aunque parezca extraño podríamos diseñar reglas lógicas que no se cumplen en nuestro mundo actual pero que se podrían cumplir en un mundo posible. Por ejemplo, podríamos plantear un mundo donde $A \rightarrow B$ no tenga las mismas condiciones de verdad que $\sim A \vee B$. Desde nuestro mundo eso sería ilógico, pero lo que Priest y su concepto de mundo no normal nos dicen es que lo ilógico es algo relativo y no absoluto. Pensemos en algo tan aceptable como, por ejemplo, “El kilo de arroz cuesta S/. 1 o el kilo de arroz no cuesta S/. 1”. Esta verdad, solemos decir, es necesaria y, por ende, se cumple en todos los mundos posibles (usando terminología leibniziana). Sin embargo, lo que nos está pidiendo Priest es que consideremos que eso ocurre en mundos (posibles) normales. No podemos decir lo mismo de los mundos no normales. En base a ello, Priest habla de relaciones entre mundos no normales, modifica el condicional y no permite que sea válido el *Modus Ponens*. Así, la paradoja de Curry no se produce.

Sin embargo, estudios actuales de Beall y Shapiro prueban que no todas las variantes de las lógicas paracompletas, por un lado, ni todas las de las lógicas paraconsistentes, por otro lado, pueden realmente significar una manera definitiva de terminar con el problema planteado por la paradoja de Curry. Por un lado, con respecto a la lógica paracompleta, escriben Beall y Shapiro:

Muchas de las lógicas no clásicas que se han propuesto para respaldar las respuestas a la paradoja de Russell y la paradoja del mentiroso son lógicas paracompletas, lógicas que rechazan la ley del medio excluido. Estas lógicas hacen posible las teorías “gappy”. En particular, donde λ y $\sim\lambda$ son intersubstituibles de acuerdo con una teoría T , no será cierto que $\vdash_T \lambda \vee \sim\lambda$.

Un ejemplo es la lógica $\mathbb{L}_3$ basada en las tablas de verdad de tres valores de Łukasiewicz (...). $\mathbb{L}_3$ ofrece una posible respuesta a la paradoja de Russell y al Mentiroso (...). Sin embargo, considere el condicional iterado $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, que abreviamos como $\alpha \Rightarrow \beta$. Supongamos que una oración de Curry para π y una teoría T basada en $\mathbb{L}_3$ se redefinen como cualquier oración $\kappa \Rightarrow$ intersubstituible con $\kappa \Rightarrow \pi$. Entonces, T cumplirá todas las condiciones del Lema de la paradoja de Curry (...). Por lo tanto, siempre que haya una κ que sea intersubstituible con $\kappa \Rightarrow \pi$ según T , entonces $\vdash_T \pi$. En consecuencia, $\mathbb{L}_3$ no respaldará una respuesta a la paradoja de Curry. (Beall y Shapiro, 2018, párr. 55-56)

El lema de la paradoja de Curry plantea que a partir de una teoría T y una oración π que cumplen con la posibilidad de la construcción de

una expresión tipo Curry para π , contienen la regla de la identidad y usan un condicional que respete el MP y la Contracción, es posible deducir π . Y, sucede que esto sigue ocurriendo en ciertas propuestas paracompletas. Por ende, no toda lógica paracompleta logra frenar a la paradoja en cuestión pues validan la deducción de cualquier enunciado π . Por otro lado, con respecto a la lógica paraconsistente escriben Beall y Shapiro:

Meyer, Routley y Dunn (...) llaman la atención sobre (...) las lógicas paraconsistentes, que son lógicas según las cuales una oración junto con su negación no conllevará ninguna oración arbitraria. Las lógicas paraconsistentes pueden usarse para obtener teorías que resuelvan la paradoja de Russell, y el Mentiroso, abrazando la inconsistencia de la negación sin sucumbir a la trivialidad.

De acuerdo con dicha teoría T, las oraciones λ y $\sim\lambda$ pueden ser intersubstituibles, siempre y cuando se den ambas $\vdash_T \lambda$ y $\vdash_T \sim\lambda$. Tales teorías son “glutty”, en el sentido de que afirman alguna oración junto con su negación (...). Sin embargo, una serie de lógicas paraconsistentes prominentes no pueden servir como base para las teorías Curry-completas a riesgo de caer en trivialidad. (Beall y Shapiro, 2018, párr. 53-54)

Una oración Curry para π y T es cualquier oración κ tal que κ y $\kappa \rightarrow \pi$ son equivalentes de acuerdo con la teoría T. Asimismo, es importante saber que la notación $\vdash_T \alpha$ se usa para indicar que la teoría T contiene la oración α . Finalmente, podemos afirmar que una teoría T es Curry-completa siempre que para toda oración π en el lenguaje de T, haya alguna otra expresión π' tal que (i) haya una oración Curry para π' y T y (ii) si $\vdash_T \pi'$ luego $\vdash_T \pi$. Así pues, sucede que cierto tipo de lógica

paraconsistente puede ser utilizable como base para la construcción de teorías Curry-completas y, por ende, caen en trivialidad, pues logran aceptar como teorema a cualquier enunciado construible. En conclusión, no toda propuesta paraconsistente detiene a la paradoja de Curry.

5. Examinando críticamente a Curry

Sería interesante, a fin de saber qué sucede, examinar por entero la paradoja en cuestión. Si nos fijamos en sus tres partes (premisa, demostración y conclusión) notaremos algunos aspectos ciertamente llamativos. En primer lugar, la expresión que genera la paradoja (la premisa) resulta siendo irrelevante (en un sentido no formal) pues proviene de vincular un antecedente y un consecuente que nada tienen que ver. No hay relación entre un condicional verdadero y cualquier otra expresión que se nos ocurra. La expresión condicional “c: Si c es verdad entonces B” conecta dos situaciones donde una no aporta contenido alguno realmente importante a la otra.

Es más, parecen trivial, antojadiza y artificialmente conectadas⁹². En segundo lugar, la demostración que respalda la paradoja de Curry usa y abusa de la prueba condicional. Sin embargo, también es posible obtener la paradoja de Curry si usamos la prueba directa y la reducción al absurdo. Llama la atención que sobre esto no se

⁹² Si se considera que la autorreferencia del antecedente hacia todo el condicional permite que haya relación de relevancia entre antecedente y consecuente (pues comparten variables) debemos sostener que estamos utilizando la expresión “relevancia” en un sentido no necesariamente formal. Específicamente, en un contexto no formal la relevancia consiste en la relación de conexión o fundamentación entre premisa y conclusión. Así, no hay relevancia entre un antecedente autorreferente (cuya fundamentación es problemática) y cualquier información que se plantee en el consecuente.

escriba mucho. Probablemente, esto se deba a que la deducción es más sencilla usando la prueba condicional. En tercer lugar, la conclusión no parece tan ‘nueva’ como aparentemente se quiere hacer notar. La condicional de Curry que aparece como premisa contiene a la variable de la conclusión:

$$[C = (\text{Tr} \langle C \rangle \rightarrow \mathbf{B})] \rightarrow \mathbf{B}$$

Entonces, resulta siendo algo no tan inesperado el hecho de deducir B, desde este punto de vista⁹³.

A partir de la constatación de la naturaleza irrelevante (a nivel informal) de la expresión condicional de Curry $[C = (\text{Tr} \langle C \rangle \rightarrow \mathbf{B})]$ y de la aparente relevancia (a nivel formal) de la prueba total $[C = (\text{Tr} \langle C \rangle \rightarrow \mathbf{B})] \rightarrow \mathbf{B}$ de Curry, se nos ocurre que otra lógica no clásica, a saber, la lógica de la relevancia podría sernos de ayuda en este asunto.

La lógica de la relevancia de Anderson y Belnap (1975) ciertamente ha sido de gran ayuda para poder hacerle frente a las paradojas de la implicación material y las de la estricta que podemos ver enseguida.

1. Fórmula: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Significado: una proposición verdadera será implicada por cualquier proposición.

Latín: *verum sequitur ex quodlibet*.

Traducción: lo verdadero se sigue de cualquier cosa.

2. Fórmula: $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Significado: una proposición falsa implicará cualquier otra.

⁹³ Pensemos en el caso $(\sim A \wedge A) \rightarrow B$. Es evidente que aquí entre premisas y conclusión no hay variables en común. ¿Acaso esto ocurre en el caso de Curry? No lo parece.

Latín: *ex falso quodlibet*.

Traducción: de lo falso se sigue cualquier cosa.

3. **Fórmula:** $\Box A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Significado: una proposición necesaria será implicada estrictamente por cualquier proposición.

Latín: *necessarium sequitur ex quodlibet*.

Traducción: lo necesario se sigue de cualquier cosa.

4. **Fórmula:** $\sim \Diamond A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Significado: una proposición imposible implicará estrictamente cualquier otra.

Latín: *ex contradictione quodlibet*.

Traducción: de lo contradictorio se sigue cualquier cosa.

Son consideraciones como la siguiente la que ha dado origen a la necesidad de estudiar este tipo de lógicas:

La no aceptación de que podamos afirmar como verdadero cualquier enunciado a partir de una afirmación contradictoria, como sucede en el enunciado (1) [Si 2 es distinto de 2, Bertrand Russell es Dios], ha provocado una discusión sobre la exigencia de una relación de relevancia (semántica y sintáctica) entre el antecedente y el consecuente de un condicional y entre cada una de las premisas y la conclusión de un argumento, para que podamos hablar de relación de implicación entre el antecedente y el consecuente o entre el conjunto de las premisas y la conclusión. (Díez, 2013, p. 124)

La evaluación del condicional (1) aludida en la cita plantea problemas frente al análisis en términos de la lógica clásica. Dado que se

trata de dos falsedades vinculadas mediante el conector del condicional, el análisis arrojaría que dicho condicional es verdadero. Sin embargo, la realidad es que, en este particular caso, se ha buscado enfatizar (con sarcasmo) que es falso que 2 sea distinto de 2. De tal modo que de una expresión condicional de la forma “Si A entonces B” (donde A es una falsedad y B es otra falsedad) se deduce $\sim A$. La pretendida ley anterior no es correcta en lógica clásica puesto que dicha condicional tendría que resultar una verdad cualquiera (incluso $\sim B$, por ejemplo, o cualquier otra verdad que se nos ocurra). Sin embargo, esto depende de las pretensiones de quien plantee esa curiosa condicional. Por ende, dado que el análisis clásico termina extraviándonos, se justifica el recurrir a otra lógica (no clásica) para poder tratar este tipo de asuntos.

Hay dos condiciones que deben cumplir los razonamientos para que sean relevantes. Ambas condiciones son conocidas como semántica y sintáctica. La condición semántica relevante exige que debe haber variables comunes entre la premisa y la conclusión de un razonamiento. La condición sintáctica relevante exige que la premisa sea utilizada, es decir, que se le apliquen reglas lógicas aceptables que deriven en la conclusión. Las anteriores condiciones permiten a Anderson y Belnap elaborar una lógica que le puede hacer frente a las paradojas de la implicación material y las de la implicación estricta. Por cierto, el parecido entre estas paradojas y la paradoja de Curry⁹⁴ han sido las que nos han llevado a examinar la lógica relevante.

⁹⁴ Los parecidos son varios. Por ejemplo, el hecho de tratarse condicionales que involucran consideraciones semánticas. Además, ambas no conducen a contradicciones sino a resultados que van en contra de nuestras intuiciones. Sin embargo, también hay diferencias. La autorreferencia es la más saltante. Otra diferencia es que en el caso de Curry la verdad se dirige

Lo curioso es que en la paradoja de Curry son respetadas ambas condiciones (semántica y sintáctica), pues la conclusión y la premisa comparten una variable y, además, a partir de las premisas se obtiene lógicamente la conclusión⁹⁵. Además, según Beall, Brady, Hazen, Priest y Restall:

La discusión se llevará a cabo con un ojo en las aplicaciones de la lógica relevante, y en particular su uso en formalizar una teoría ingenua de conjuntos y una teoría de la verdad. Esas teorías son susceptibles de ser inconsistentes, pero en la lógica relevante esto no importa, dado que la Explosión ($\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$) es inválida, así las contradicciones están en cuarentena. Pero no todas las lógicas relevantes son adecuadas para este propósito. Las lógicas relevantes que contienen el principio de Contracción ($\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$) trivializan esas teorías, debido a las paradojas de Curry. (...) (Beall, *et al.*, 2006, p. 588)

Así pues, cierto tipo de lógica relevante se nos presenta como una opción también equívoca. Por ello, no toda lógica relevante resuelve la paradoja de Curry. Podríamos seguir viendo lógicas no clásicas para poder saber cómo es que estas han logrado detener o destruir a la paradoja de Curry. Sin embargo, las lógicas no clásicas conforman una línea de investigación en progreso y su número ha aumentado considerablemente. Posiblemente, las investigaciones en ese campo han dado resultados más que reconfortantes. Nosotros hemos paseado un

hacia todo el condicional no hacia solo el antecedente o solo el consecuente como es el caso de las paradojas de la implicación.

⁹⁵ Para un análisis relevante de Curry se puede consultar Foukzon (2015).

buen rato por el jardín formal de las lógicas no clásicas y no hemos encontrado aquella flor que satisfaga nuestros exquisitos gustos. La insatisfacción crece, ya se hace tarde y justo al frente nuestro tenemos otro jardín no formal que también ofrece una cierta variedad al parecer no tan popular entre los cultivadores típicos. Vamos a explorarla, aunque eso implique que se nos cuestione por ser tan inquietos, tan poco especializados y tan poco persistentes. Nunca hemos dejado claro que solo nos conformaríamos con la lógica formal. Para investigar es preciso a veces romper los límites dentro de los cuales se suelen mover los que buscan la verdad porque esta carece de límites en el sentido de que se encuentra en ocasiones en el lugar menos esperado⁹⁶. Habiendo aprendido mucho de ella y dándole las gracias por su sabiduría ahora nos toca encontrar nuestro camino. Específicamente, creemos que podemos enfocar a la lógica (en general) no solo como un cálculo que modele ciertas maneras inferenciales de nuestros humanos procesos racionales. Creemos que la lógica puede asentarse en nuestro trato cotidiano. Por ello, frente al sinsabor dejado por nuestro infructuoso paseo, hemos optado por acudir a la pragmática y, en este punto, se tiene que hacer una reflexión aparte.

5.1. Lógica formal versus lógica no formal

La lógica se ha visto dividida en dos bandos. Ambas posturas creen que no deben tener injerencia en el campo del otro. Ambas se presentan

⁹⁶ Sin embargo, no pretendemos salirnos totalmente del marco teórico de la lógica en general. La creatividad y el desorden metodológico no coinciden en el presente trabajo de investigación.

como especializaciones. Ambas sostienen que estudian objetos de naturaleza muy distinta.

Se tratan de las lógicas formal y no formal. Por un lado, la lógica formal se ha especializado en cuestiones abstractas y usa un lenguaje técnico que, a veces, es poco accesible a los que no tienen práctica. Por otro lado, la lógica no formal se basa en el lenguaje natural y busca establecer los protocolos sobre los procesos argumentativos en contextos cotidianos.

Ambas lógicas son virtuosas y son algo así como distintas caras de una misma moneda, pero la tradición las ha separado a tal punto que, hoy en día, una y otra se encuentran enfrentadas y ninguna suele ceder su lugar a la otra so pretexto de que se tratan de áreas excluyentes.

Esta distinción se remonta a la división entre ciencias y humanidades. Por un lado, tenemos a la ciencia cargada de conocimientos y con vistas a una utilidad a largo o corto plazo y, por otro lado, tenemos a las humanidades cargadas de valores y con vistas a dotar de herramientas críticas a sus cultores. Del mismo modo, la lógica formal que es percibida como lógica matemática (o se haya vinculada de alguna manera al discurso matemático) se presenta como una aliada de la ciencia y, en tanto sistema axiomático, busca consolidar su estatus de conocimiento. Asimismo, la lógica no formal que se haya ligada a los análisis del discurso (o al tema de la argumentación) se presenta como el soporte fundamental de las humanidades y, en tanto disciplina filosófica, requiere problematizar (como muestra de una necesidad crítica y valorativa) todos los intereses en juego en lo que respecta al intercambio comunicativo.

Insistimos. Los lógicos suelen dividir su área de estudio en dos: el formal y el no formal. Aunque desde ambos bandos hay ataques y retos; cada lado de la lógica excluye a la otra y la acusa de no ser lógica realmente. Ahora bien, ¿qué se entiende por lógica per se? El problema es que esta es una cuestión filosófica y solo puede “responderse” (dogmáticamente) abandonando la filosofía y adoptando previamente un marco teórico que moldee el tipo de respuesta que uno busca. En realidad, y esta es la parte polémica de esta investigación, tener la mente abierta significa, en lógica, ser capaz de entender que, a pesar de las dicotomías, la lógica es *una*⁹⁷. No hay una lógica informal de la conversación cotidiana que esté al margen de la aquella lógica formal que fundamente nuestros procesos inferenciales.

Para aclarar este punto es importante considerar que no estamos asumiendo que solo haya una lógica correcta mientras que las otras no lo son. A esta posición, denominada monismo, se le suele contraponer la tesis del pluralismo. El punto de la controversia estriba en decidir y argumentar si la lógica clásica o cuál de las no clásicas (sobre todo las rivales o divergentes) es la correcta. Sin embargo, cuando afirmamos que la lógica es *una* lo hacemos con el fin de persuadir sobre la idea de que se debe buscar unidad en los estudios de lógica. La lógica es formal y también no formal.

Ni siquiera Aristóteles podría decirse que es solamente un lógico formal o únicamente un lógico no formal. El mismo argumento aplica para Wittgenstein o para Frege. El Wittgenstein del *Tractatus lógico-*

⁹⁷ La lógica en la que estamos interesados ha recibido el nombre de “lógica filosófica” por Miró Quesada (1978).

philosophicus (2009) y el de las *Investigaciones filosóficas* (2009) constituyen dos caras de la misma moneda. Igualmente, el Frege de la *Conceptografía* (1972) y el de los *Escritos filosóficos* (1996) se apoyan mutuamente. Los hombres auténticos suelen romper paradigmas y pensar fuera de la caja en la que se les quiere arrinconar, por ello resulta complejo etiquetarlos. Por eso, el presente capítulo es un trabajo humanístico de investigación dentro del área de la filosofía (de la lógica) y no solo dentro de la lógica.

Nosotros consideramos que la lógica no es solo un sistema axiomático sino, sobre todo, parte de la filosofía, es decir, una disciplina filosófica que analiza, cuestiona e investiga la naturaleza, estructura y contenidos de los argumentos (Mora, 2019a). La lógica modela estructuras inferenciales y ninguna manera de razonar está lo suficiente e indiscutiblemente fundamentada como para ser la hegemónica. El solo hecho de la existencia de lógicas no clásicas lo prueba y la posibilidad de pensar un asunto de índole formal o abstracta en términos de lógica no formal y en base al lenguaje ordinario lo confirma. Esto último es lo más difícil de comprender. Así pues, somos partícipes de la idea de que la lógica es *una* y, por ende, tanto el enfoque formal (sea clásico o no) como el no formal presentan diferentes aspectos sobre la cuestión estudiada que pueden complementarse armoniosamente.

Quizás se deba argumentar más sobre la cuestión de las lógicas no clásicas antes de aclarar el asunto de la dicotomía formal-no formal. Se suele discutir en torno a la racionalidad que respalda el uso de tal o cual lógica no clásica. El solo hecho de negar alguna regla o ley considerada correcta desde la perspectiva clásica, resulta muy controversial. Sin

embargo, el configurar un cierto orden conceptual (conocido o inesperado) a partir de un conjunto reducido de leyes o principios lógicos no se pone en cuestión. La idea fundamental es que todo orden conceptual está relacionado a las leyes o principios lógicos que se acepten con anticipación. La lógica (no clásica) aceptada *a priori* condiciona el tipo de conceptos y las relaciones que se encuentren en una inspección básica del uso de dicha lógica.

Por ello, en lo que sigue nos hemos preocupado por intentar captar el sentido comunicacional de la paradoja de Curry, dentro del ámbito no formal y pragmático. Aunque, de hecho, sabemos que este camino representa un cambio de giro radical en esta investigación, nuestra intención es ver la manera en la que podemos ya no resolver sino más bien disolver, deshacer, desenredar el problema que supuestamente nos causa la paradoja en análisis. Es importante considerar que solo hay que resolver aquello que represente un problema. Un problema surge cuando, dado nuestro marco teórico, las cosas no salen como creemos que deberían salir. Por ejemplo, que, a pesar de las lluvias, no crezcan las plantas en los jardines. Sin embargo, si estamos ante un hecho, no hay problema que resolver. Por ejemplo, en invierno no suelen crecer las plantas, pero esto no es un problema sino un hecho. Algo así ocurre con la paradoja de Curry: se trata de una expresión que transmite un mensaje ni contradictorio ni fuera de lo normal⁹⁸. Pero para entender esto hay que

⁹⁸ Podemos comparar esta paradoja y la de Banach-Tarski (Banach y Tarski, 1924), la misma que sugiere que, a partir de una esfera es posible obtener dos del mismo tamaño que la original reorganizando sus partes componentes. La paradoja de Banach-Tarski pues se considera algo así como un teorema geométrico y no constituye una contradicción lógica, aunque sí contradice nuestro sentido común. En ese sentido, es muy semejante a la paradoja de Curry.

salir fuera de los límites de la formalidad en los que se haya encerrada la lógica. Así, aunque esta paradoja es producida por un análisis formal que involucra la autorreferencia y los condicionales de ciertos sistemas lógicos se considera que no es ajena a las prácticas coordinadas de los hablantes competentes. Más bien, dichos análisis resultan complementados por las prácticas mismas provenientes del ámbito comunicacional.

Pues bien, se sabe que la paradoja de Curry tiene como objetivo ciertas teorías puramente formales y los problemas (la trivialidad deductiva de las teorías y la no aparición de la negación ni de la contradicción) son problemas en dicho contexto. Además, la paradoja de Curry es una paradoja a partir de los recursos de los lenguajes formales, como el hecho de probar algo que está mencionado en el consecuente del condicional autorreferente. El autor de este trabajo es realmente consciente de estas ideas. Sin embargo, el replanteo de esta paradoja en el terreno de lo no-formal tiene la ventaja de revelar aspectos desconocidos en el funcionamiento de esta paradoja en un contexto conversacional. Precisamente, en el lenguaje natural es posible comprender el impacto desestabilizador de las paradojas de *El Mentiroso* y de Russell. Así, sus versiones informales circulan libremente y convencen. ¿Ocurrirá algo análogo en la paradoja de Curry? Esto es lo que buscamos establecer.

La estrategia de inspeccionar en un ámbito no necesariamente formal a las paradojas no es una maniobra nueva. Los antiguos griegos como el estoico Crisipo de Soli parece sugerir que *El Mentiroso* “no es una proposición, sino un sonido sin sentido” (Bochénski, 1985, p. 114).

Los medievales como Ockham ya lo aplicaron para proponer ideas al respecto: “La solución más común a las paradojas (...) fue la de indicar que se trata de círculos viciosos. Ockham señalaba ya que ninguna proposición puede afirmar nada de sí misma, pues de lo contrario el círculo vicioso es automáticamente engendrado” (Ferrater, 1994, p. 366). Por ejemplo, ante la paradoja de *El Mentiroso*, si se pregunta ¿qué es ‘Esto’? en “Esto es falso”, se dirá que es la misma oración. ¿Cuál?, preguntaremos y nos dirán “Esto es falso”. De nuevo, preguntamos ¿qué es esto? en “Esto es falso” y volvemos al inicio y como, en teoría, tendríamos algo como “(...(...(...es falso) es falso)...) es falso” lo cual es incomprensible para una mente finita, podemos desestimar la paradoja por provenir de una oración que no termina de ser comprendida puesto que no tiene verdadero fin.

Este análisis es pragmático y consideramos que es muy útil el tratar de hacer que los problemas lógicos vuelvan a ser manejables por un público no necesariamente imbuido en conceptos puramente formales de la lógica. Si no hacemos caso de esta sugerencia, nos arriesgamos a volvernos oscurantistas y elitistas en lógica al creer que solo los expertos que manejen dispositivos técnicos muy complejos tienen algo realmente importante que decir. La lógica debe ser accesible y captable por todos sus usuarios, es decir, la humanidad entera. Por último, si se piensa que desde la pragmática todo asunto problemático pierde dicha condición, deberíamos probar la afirmación anterior realizando precisamente estudios pragmáticos que avalen esa tesis. Mientras no se pruebe ello, esa idea solo seguirá siendo mero prejuicio. Por nuestra parte, creemos que

el análisis pragmático nos puede procurar frutos realmente interesantes de analizar.

5.2. La perspectiva pragmática

Debido a que hemos visto que el enfoque formalista puede tener serios problemas a la hora de enfrentar a la paradoja de Curry tendremos que recurrir al enfoque no formal o pragmático.

Para justificar este salto de una lógica a otra tenemos que explicar tres cuestiones. En primer lugar, consideramos que el lógico debe dejar de ser visto como ajeno a la realidad cotidiana. Desde que se planteó en el manifiesto del Círculo de Viena: “Algunos, plácidos en el aislamiento, llevarán una existencia retirada en los gélidos glaciares de la lógica” (Neurath, Hahn y Carnap, 2011), se cree que la lógica es ajena a la realidad mundana. Pero esto no es verdad porque después de todo el que hace lógica es un ser humano. En segundo lugar, la lógica a pesar de ser enfocada como formal o no formal, es *una* (como ya se indicó). La lógica que se aprende en los centros educativos y la que se usa en el trato diario es *una* y la misma. Si fuesen diferentes, no tendría sentido buscarles conexión con la realidad. En tercer lugar, la lógica necesita considerar un modelo de razonamiento proveniente de la misma realidad para poder criticar con fundamento ciertas reglas aceptadas dentro del orden clásico formal.

De acuerdo al *Compendio de lógica, argumentación y retórica*, “la pragmática es la disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y los usuarios” (Uxía, 2012, p. 473). Al respecto Gamut sostiene que “la pragmática se ocupa principalmente de las relaciones entre las

expresiones y su uso” (2004, p. 208). De semejante opinión es el *Novo Dicionário de Lógica* que afirma que la pragmática es “el estudio de las relaciones que rigen entre los signos y las personas que los interpreten” (Hegenberg y Ferreira, 2005, p. 263). Y, sobre todo es en el ámbito comunicacional donde se hace más notable la pragmática. Ahora bien, siguiendo a Horacio Miranda y Marisa Guzmán:

Todos sabemos que la comunicación tanto verbal como no verbal se constituye en la esencia del ser humano. Nos comunicamos todo el tiempo, y de diversas maneras en forma natural, sin tener conciencia del código que usamos, con una creatividad y generatividad que ilustra la afirmación central de Chomsky (...), cuando refiere la capacidad del ser humano para generar una cantidad infinita de enunciados, a partir de un número finito de elementos. Es, en definitiva, lo que nos diferencia de otras especies no humanas que, sin contar con el lenguaje estrictamente humano, se comunican con sus congéneres sobre la base de un repertorio limitado de señales. (Miranda y Guzmán, 2012, pp. 230-231)

Precisamente, la idea de la naturalidad de la comunicación vendría a ser un buen marco teórico desde cual podríamos enfrentar asuntos como la paradoja de Curry. Aunque, ciertamente, para poder tratarla tendremos que darle otra apariencia. La expresión de Curry para nosotros será esta otra muy semejante: “Si tengo la razón, entonces el libro está sobre la mesa”. La autorreferencia en este caso se detecta en la expresión “tengo la razón” pues asumiremos que alude a todo el

condicional en sí. Una buena base teórica para nuestras reflexiones es la lógica de la conversación planteada por Grice:

Nuestros intercambios comunicativos (...) son característicamente, por lo menos en cierta medida, esfuerzos de cooperación; y cada participante reconoce en ellos, en cierto grado, un propósito o conjunto de propósitos comunes, o, por lo menos, una dirección aceptada mutuamente (...). En cada fase, algunos posibles movimientos conversacionales serían rechazados por conversacionalmente inapropiados. Podríamos, pues, formular un principio general aproximativo que se espera que sea observado por los participantes (en igualdad de circunstancias), es decir: haga que su contribución a la conversación sea la requerida, en cada frase que se produzca, por el propósito o la dirección mutuamente aceptados del intercambio comunicativo en el que está usted involucrado. (Grice, 1975, p. 45)

Grice plantea una especie de lógica acerca de los intercambios comunicacionales que acontecen en la conversación. De hecho, al principio expuesto líneas arriba se le suele llamar ‘principio de cooperación’ y sostiene que cuando conversemos debemos pensar en contribuir de cierta manera al diálogo en el que participamos.

Adicionalmente a este principio Paul Grice plantea una serie de máximas muy interesantes.

1) Máxima de Cantidad

1.1. Haga que su contribución sea tan informativa como sea necesario (para los propósitos de la conversación).

Ejemplo: Hoy es lunes y Juana le pregunta a Ricardo si sabe si Alberto ha venido a la oficina y Ricardo responde “Alberto siempre viene a la oficina los lunes”.

En este caso, la respuesta de Ricardo no ha dado suficiente información para responder lo que Alberto le está preguntando. No es recomendable expresarse así.

1.2. No haga que su contribución resulte más informativa de lo necesario.

Ejemplo: Pedro le pregunta a un compañero si sabe dónde está la engrapadora y él responde de este modo: “Sí, está en la mesa pequeña junto a la impresora, en el mismo sitio en el que la dejaste la semana pasada y del que te he dicho que la quites varias veces”.

En este ejemplo, el compañero de Pedro responde con más de lo que se necesita para responder la duda de Pedro. Este tipo de comunicación no es admisible.

2) Máxima de Calidad

2.1. No diga lo que crea falso.

Ejemplo: Una hija adolescente, ante un plato de comida que no es de su gusto, informa a la madre, acompañándose de información no verbal (gestos, entonación) lo siguiente: “Gracias, Ma. Cada día me gusta más el bacalao”.

En este caso, la hija le está respondiendo a su madre con una falsedad acerca de sus gustos gastronómicos. Esto debería evitarse.

2.2. No diga aquello de lo cual carezca de pruebas adecuadas.

Ejemplo: Juana le cuenta un rumor a Carla: “Dicen por ahí que María y Julio han terminado”. Carla pregunta: “¿Estas segura?”. Finalmente, Juana responde: “La verdad que no estoy convencida”.

En este ejemplo, lo que afirma Juana no tiene suficientes pruebas y, por ende, no debería ser dicho.

3) Máxima de Relación (o pertinencia o relevancia)

3.1. Diga cosas relevantes.

Ejemplo:

A: ¿Cristian no va con nosotros? ¿Lo han llamado?

B: Bueno, ahora tiene una novia nueva, una chica guapísima. Modelo, creo. Y, está siempre con ella.

B no responde directamente la duda de A. El saber que está con una modelo no es relevante para lo que pide saber A. Bastaría con responder sus 2 preguntas.

4) Máxima de Forma (o manera o modalidad)

4.1. Evite la obscuridad.

Ejemplo:

A: Papá, ¿qué es el color verde?

B: Ah, bueno. Verde es el color que se percibe ante la fotorrecepción de una luz cuya longitud de onda mide entre 495 y 570 nanómetros. Entendiste, ¿verdad?

En este caso, la respuesta del padre está formulada en un lenguaje demasiado técnico como para que la duda de su hijo sea resuelta. Este caso no satisface la comunicación.

4.2. Evite la ambigüedad.

Ejemplo: Un doctor le comenta a su paciente: “Me parece que este país marcha bien”, y este le responde: “Sí, doctor. Hay marchas por todos lados. Ya no se puede transitar con tranquilidad”.

En esta situación, el paciente ha comprendido algo muy distinto de lo que comenta su doctor, por ello, la comunicación no ha sido efectiva.

4.3. Sea escueto.

Ejemplo:

Karla: ¿Recuerdas que mañana como avisaron por correo tenemos esa reunión con el jefe? Tengo un poco de temor...

Pedro: ¿Qué reunión? No me llegó el correo, ¿temor de qué?

Karla: Es que hablaremos de un tema importantísimo...

Pedro: ¿Del aumento de sueldo?

Karla: No pues, Pedro. De eso no, de lo otro... ¿no recuerdas?

Pedro: ¿De las vacaciones? Ay, ¿Karla podrías decirme de qué se trata?

Karla: No puedo es que de solo pensarlo me siento mal, te lo juro.

En este caso, el rodeo de Karla no está permitiendo que Pedro consiga entender lo que está queriéndole decir. No es recomendable expresarse así.

4.4. Sea ordenado.

Ejemplo:

Supongamos que una profesora le pregunta a un alumno por qué no hizo la tarea. El joven, en lugar de dar una respuesta concreta, contesta así: “Estaba dispuesto a hacer la tarea, pero estos días son algo complicados para mí. Y le juro que, aunque yo quería cumplir con mis

obligaciones, al final no pude. Es que la semana pasada perdí mis libros y no me acordaba de la tarea”.

En esta situación, el joven se expresa de modo tan desordenado que no logra explicar adecuadamente su irresponsabilidad. Uno no debe expresarse de este modo.

Una de las máximas que nos interesa para tratar el enunciado de Curry es la de cantidad: no haga que su contribución a la conversación sea más informativa de lo esperado. Además, otro concepto que nos va a ser de mucha ayuda es el de “implicatura conversacional”. Siguiendo a Haverkate:

Siendo normas de conducta, las máximas pueden ser respetadas o violadas. Incluso hay una tercera posibilidad, que es la que Grice denomina *flouting a maxim* (“burlar una máxima”). Podemos decir, para caracterizar la diferencia entre violar y burlar, que la violación es una desviación intencionada de la norma, la que sirve para engañar o perjudicar al interlocutor. La violación de la primera máxima de calidad, por ejemplo, produce una mentira. El burlar una máxima también acarrea la desviación de una norma, pero, en este caso, es manifiesta; esto es, el hablante intenta conseguir que el oyente se dé cuenta de la ruptura de la máxima. Así, por ejemplo, la ironía es producto de que un hablante se burle de la máxima de calidad (...). (1992, p. 179)

Así pues, la implicatura conversacional alude a un mensaje encubierto que se espera que el otro decodifique para tener éxito en la comunicación en desarrollo. La implicatura conversacional surge por una

burla adrede de una máxima conversacional. Por ejemplo, en este caso se viola la máxima de cantidad.

A: ¿Nos vamos a comer a la playa?

B: Podemos comer si quieres, pero yo tengo que llegar a casa pronto. Mañana tengo muchísimo trabajo....

Como podemos notar, A recibe más información de la necesaria, por ello, aquí se estaría atentando contra la máxima de cantidad. Y, además, se estaría implicando algo conversacionalmente, a saber, que B (que es muy cortés y amable) tiene otras cosas que hacer y que preferiría mejor hacerlas antes que ir a la playa a comer. Por ese motivo, está dando más información de la pedida, pero aun así consigue que el emisor transmita su mensaje.

Pues bien, precisamente esto es lo que creemos que ocurre en la paradoja de Curry. Al decirle a alguien que “Si tengo la razón, entonces el libro está sobre la mesa” ($R \rightarrow L$) en un contexto conversacional ello significa algo más simple. Significa que tiene la razón (R) y que el libro está sobre la mesa (L). O de manera más simple aún: el libro está sobre la mesa. Se ha dado más información en el antecedente para que el receptor capte el énfasis otorgado al consecuente y, de este modo, se viola la máxima de cantidad⁹⁹. Este es todo el asunto y nada más.

Puede ser útil, para entender con mayor claridad este asunto, considerar la teoría redundantista de la verdad de Ramsey (1990).

⁹⁹ También, se ha detectado que se violan las máximas de modo (claramente aumenta la oscuridad de la conversación al plantear “Si tengo la razón...”) y la de relevancia (el condicional con autorreferencia en el antecedente simplemente no viene al caso en una conversación). Sin embargo, para los objetivos de este trabajo basta con mostrar cómo se viola al menos una de las máximas de Grice.

Simplificando la propuesta de Ramsey pondremos un ejemplo muy sencillo. Para Ramsey, cuando alguien afirma que “Es verdad que los presidentes son ciudadanos” (1) lo que está diciendo es, en realidad, “Los presidentes son ciudadanos” (2). De este modo, la expresión “Es verdad que” solo cumple la función de enfatizar la información vertida a continuación y, en realidad, no aporta mucho significado de tal forma que incluso puede eliminarse de (1) sin mayor inconveniente.

De acuerdo a García Suárez (2011, pp. 295-296), los teóricos de la redundancia no sostienen que el predicado “es verdadera” simplemente repita lo expresado en la proposición a la que se aplica. Su postura es que dicho predicado carece de contenido adicional y no aporta información nueva. Afirmar que una proposición es verdadera equivale a expresar la proposición misma. Por ejemplo, decir “Es verdad que César fue asesinado” no añade nada más a “César fue asesinado”, de la misma forma que “Es falso que César fue asesinado” equivale a “César no fue asesinado”.” Así, los términos “verdad” o “verdadero” no poseen un significado aseverativo autónomo. Según esta perspectiva, las teorías tradicionales que consideran la verdad como una propiedad o relación están equivocadas, ya que todo lo que puede expresarse utilizando el predicado “es verdad” puede decirse también sin él, lo que lo hace redundante.

Del mismo modo que ocurre con la teoría redundantista, nosotros afirmamos que cuando alguien afirma “Si tengo la razón entonces B” lo que podemos entender de su expresión con mayor claridad es que B.

De este modo, nos hemos alejado de los esfuerzos sintácticos y semánticos de los diversos sistemas lógicos para considerar el rol de los

enunciados condicionales autorreferenciales en las prácticas conversacionales para así mostrar que del enunciado de Curry se infiere su consecuente.

Puede sorprender que un condicional termine significando su consecuente, pero este asunto es más común de lo que se cree. No siempre la forma gramatical de una expresión se condice con su forma lógica o estructural. Hay varios casos que certifican esto. Analicemos tres para ver lo que ocurre.

1. Pienso luego existo.
2. Si $2=9$ entonces yo soy el genio de la lámpara.
3. Seas o no seas hijo del director, igual no ingresarás a la institución.

Estas tres estructuras tienen la forma de condicionales, pero, en realidad, pueden ser interpretadas de distinta manera. En el caso primero, la expresión de Descartes más que una condicional se trataría de una conjunción¹⁰⁰. Debería ser reformulada afirmando: “pensando existo”¹⁰¹. En el segundo caso, se está sosteniendo enfáticamente que no es cierto que $2=9$, pero con cierta picardía. Lo siguiente es relevante para entender este caso:

(...) Supongamos que Juan lee algo de la última aparición espectral de Elvis Presley y exclama, “¡Si Elvis está vivo yo soy marciano!”.

Difícilmente podría decirse que con esta frase se ponen las

¹⁰⁰ Esto mismo ocurre con “Sócrates tomó cicuta y murió”, pero en sentido inverso pues, aunque parece una conjunción es, en realidad, una condicional. Un asunto distinto es saber si dicha frase cartesiana puede ser formalizada dado que constituye una pseudoproposición.

¹⁰¹ El análisis de la expresión cartesiana es motivo de mucha discusión. En este trabajo asumimos que no puede tratarse de una condicional puesto que no consideramos que, para existir, primero haya que pensar. Más bien, ocurren ambos a la vez. Sin embargo, se reconoce que la expresión: “No es verdad que piense y no exista” es mejor formulación que la original “Si pienso entonces existo” (a pesar que lógicamente son equivalentes).

condiciones para que Juan sea un marciano. Ya que Juan no es marciano, entonces si aceptamos el enunciado de Juan, estará claro (por contraposición) que Elvis no está vivo. En este caso, la construcción condicional se usa, principalmente, para enfatizar lo absurdo que sería pensar que Elvis Presley pudiera estar vivo. (...) (Goldstein, 2008, pp. 143-144)

Finalmente, en el tercer caso, dicha condicional se reduce a su consecuente y lo que dice es que el receptor del mensaje no ingresará a alguna institución¹⁰². Veamos otros casos:

4. Vine, vi y vencí.

5. Juan disparó y mató al venado.

En el caso 4, no estamos ante una conjunción porque si así fuese se podría aplicar la propiedad conmutativa sin ningún riesgo de alterar el significado de la expresión. Lo más adecuado sería interpretarla como un condicional de esta forma $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (sin embargo, otro análisis revela que se trata en realidad de un enunciado en la función expresiva o emotiva del lenguaje). La idea sigue radicando en insistir en que la forma

¹⁰² Enseguida, el análisis de esta expresión.

3) Aunque seas hijo del director no ingresarás a la institución.

3A*) Forma lógica: Seas o no seas hijo del director, igual no ingresarás.

3A**) $(p \vee \sim p) \rightarrow \sim q$

3B*) Otra forma lógica: Si eres hijo del director, no ingresarás y si no eres hijo del director, tampoco ingresarás.

3B**) $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

Hay que señalar que tanto las fórmulas 3A**) como 3B**) son equivalentes pues ambas pueden reducirse a $\sim q$. En el caso de 3A**), dado que el antecedente es tautológico entonces la fórmula condicional se reduce a su consecuente, es decir, $\sim q$. En el caso de 3B**), aplicando equivalencias (Def. del condicional y propiedad distributiva) se obtiene

$(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$

$(\sim p \wedge p) \vee \sim q$

En esta disyunción, dado que el primer componente es contradictorio, todo se reduce al segundo componente, es decir, $\sim q$.

gramatical de una expresión no coincide con su forma lógica. En el caso 5 el análisis es análogo al caso 4. La forma lógica de 5 es $p \rightarrow q$ a pesar de la engañosa ‘y’.

Como un sexto caso, nosotros proponemos

6. Si tengo la razón, entonces el libro está sobre la mesa.

Esta expresión simplemente implica conversacionalmente que el libro está sobre la mesa. La paradoja surge desde un enfoque formal. El beneficio que nos otorga esta mirada es que es coherente con la idea de que, en el fondo, la paradoja de Curry es como la paradoja de Banach-Tarski, es decir, un resultado contraintuitivo pero fundamentado. No hay que resolver algo que no representa problema alguno. Podrán diseñarse lógicas que eviten la paradoja de Curry, pero si la maniobra diseñada para impedir esta paradoja es más compleja que la misma paradoja en sí, la estrategia resuelve el supuesto problema, pero nos compromete con otro: una lógica excesivamente técnica e innecesaria, aunque interesante en términos académicos. Desde el enfoque pragmático este asunto se disuelve, es decir, deja de ser un problema. Adiós, paradoja.

6. La paradoja de Curry y la falacia de énfasis

La enseñanza de la paradoja de Curry puede tener aplicaciones interesantes. Una de ellas se relaciona con la cuestión de si creer o no a los medios de comunicación. ¿Cómo se conecta esto con la paradoja de Curry? Aunque no es evidente, solemos creer a aquellas instituciones que se dedican a informar. Esto sobre todo ocurre frente a noticias que afirman que estudios científicos recientes han comprobado esto o aquello, aunque no solamente la ciencia es la protagonista de este tipo de

informaciones. Principalmente, la paradoja de Curry tendría esta forma: “Si este medio dice la verdad entonces A”, donde A es cualquier información que dicho medio publica.

Lo anterior refleja lo que sucede cuando simplemente creemos en lo que se nos dice porque asumimos que debe ser cierto. Precisamente, nuestra cultura tan agilizada y acelerada a la fuerza está acostumbrando a la gente a simplemente leer titulares tomándolos por ciertos. Esta práctica es tan común en el quiosco de la esquina como en las redes sociales. Por eso es que muchas personas suelen comentar un titular sin enterarse antes exactamente aquello de lo que se trata. Tal vez hemos otorgado demasiadas licencias al arte y/o estrategia empresarial del marketing o simplemente somos ingenuos y, de verdad, no sabemos cómo hacerle frente a tanta *data*. “Si crees en lo que afirmo, la siguiente información te será aceptable”, ¿debemos seguir confiando en la condicional anterior, habiendo hecho un análisis que prueba que, en realidad, solo es una manera de enfatizar la información vertida en el consecuente?

Una falacia es un modo deficiente de argumentar. Esta deficiencia puede radicar en la falta de relación entre los objetivos cognitivos del intercambio comunicativo (decidir sobre una cuestión aportando conocimiento y en base a fundamentos claros y específicos) y las estrategias usadas para cumplir con dichos objetivos. Las falacias en el ámbito comunicacional han sido ampliamente estudiadas por la tradición filosófica (Mora, 2020d). Aunque existen interesantes falacias formales, nos ocuparemos breve y particularmente de una de las falacias no formales.

Existe una falacia no formal que suelen usar los medios de comunicación que consiste en acentuar una parte de la noticia para dar a entender algo más o menos relacionado con la verdadera información. Por ejemplo, en un periódico (El Popular, 17 de julio del 2019) colocan la foto de un político investigado por corrupción vestido de futbolista (como haciendo campaña) con el siguiente titular: “LISTO PARA EL PENAL”. Por un lado, se cree que este político va a jugar fútbol. Por otro lado, se cree que, en realidad, irá preso. Incluso, algunos podrían pensar que bien podría hacer ambas cosas. Y, en letras más pequeñas aparece escrito: “Arrestan a conocido político en EEUU”. A esta situación se le conoce con el nombre de falacia de énfasis y ocurre cuando se recalca o resalta algunos elementos de una expresión lingüística, con el fin de influir de un determinado modo en la comprensión del receptor. En términos de Curry, este caso se formularía así: “Si este periódico dice la verdad entonces este político está listo para el penal”.

Las noticias falsas (que pueden incluirse dentro de lo que se ha venido a llamar “posverdad”) están en todos lados e inundan las redes de modo más espantoso que el propio coronavirus (o cualquiera de sus nuevas cepas). Esto sin duda afecta al pensamiento crítico:

El uso de este tipo de pensamiento implica saber exigir razones, hacer preguntas pertinentes y cuestionar aquello con lo que no estemos de acuerdo. Todo esto parece muy obvio, sin embargo, estamos viviendo en una época en el que esta actitud hacia la lógica y el razonamiento está desapareciendo ante el fenómeno de la llamada «posverdad».

Este término refiere a circunstancias en que los hechos objetivos resultan menos determinantes en cuanto al moldear una opinión, que el recurrir a la emoción y a las ganas de creer uno en aquello que le parece más cómodo. Es decir, la posverdad alude al hecho de creer y defender una posición, no porque haya sido analizada con detenimiento, sino solo porque se trata algo fácil y hasta conveniente creer. La posverdad se trata de un nuevo fenómeno caracterizado por la creencia en que la distinción entre verdadero o falso es innecesaria en cualquier circunstancia. Incluso, la posverdad abarca casos en el que hay una evidente distorsión deliberada de la realidad, manipulando creencias y emociones con el objetivo de influir en la sociedad.

Sobre todo, es en el mundo de las redes sociales en donde puede verse toda una gama de falsedades disfrazadas de verdad. Un ejemplo claro de esto lo constituyen las *fake news*, lo cual llama la atención siendo esta una época en la que la información fluye libremente. Si bien somos una sociedad globalizada del conocimiento, la existencia de la posverdad implica aceptar el hecho de que hay personas que se sienten cómodas y complacidas suspendiendo la capacidad de análisis ante cualquier idea que encaje con sus gustos. Así, la posverdad puede describirse como una manera de renuncia explícita a la capacidad de pensar críticamente y aquellos que la cultivan no están dispuestos a ceder ante buenas razones.

Precisamente por esto es que resulta difícil, si no imposible, procurar encontrar la verdad en una discusión en redes sociales.

Ya sea *Facebook*, *Twitter* o cualquier otra plataforma semejante, la idea de buscar la verdad esgrimiendo razones para poder orientar una conversación determinada es innecesaria e inútil. Innecesaria porque las redes sociales se han transformado más en una herramienta de entretenimiento que en una para ampliar los horizontes cognitivos. Inútil porque el otro con el que se intercambian comentarios no suele estar dispuesto a escuchar razones y suele prestar más atención a aquellos puntos de vista que son más coherentes con lo que piensa. Estamos ante la muerte de la verdad. Y junto con ella, la muerte de la lógica, del razonamiento y del pensamiento crítico. (Mora, 2020d, pp. 103-104)

Podemos tomar a la paradoja de Curry en nuestro tiempo como una advertencia para ejercitar de mejor modo el pensamiento crítico. Menos creencias y más conocimientos. Menos dogmatismos y más cuestionamientos. Menos desinformación y más filosofía (y más lógica).

7. Aportes de esta investigación

Concluiremos este trabajo señalando los aportes contundentes que se han presentado. Así pues, estos son los puntos principales:

a. La paradoja de Curry guarda relación con las paradojas de El Mentiroso y de Russell.

La expresión de Curry, al ser una condicional autorreferente de la forma: “Si esta oración es verdadera entonces B”, guarda relación con otras expresiones paradójicas pues es factible de ser reformulada tanto en términos de la lógica clásica como en términos conjuntistas.

b. La paradoja de Curry no usa negaciones ni deriva en contradicciones.

Si bien hay parecidos también hay diferencias con otras expresiones paradójicas. Así, a diferencia de *El Mentiroso* y de la paradoja de Russell, la expresión de Curry no usa ni negaciones ni deriva en una contradicción. A lo que llega es a afirmar que B es demostrable, algo inesperado pues B es una oración arbitraria cualquiera.

c. El tratamiento clásico de la paradoja de Curry arroja que $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ puede reducirse a $A \wedge B$.

La expresión de Curry (que es un condicional) se puede reducir a una conjunción. Esta idea fue recuperada al final del trabajo pues no es obvio sostener que la expresión de Curry $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ equivale a $A \wedge B$, pero esto es algo demostrable dentro de la lógica clásica.

d. No toda lógica paracompleta ni toda lógica paraconsistente resuelven la paradoja de Curry.

Se piensa que ambas propuestas dentro de las lógicas no clásicas pueden lograr evitar la paradoja de Curry, pero esto es algo incorrecto pues si bien la estrategia de abandonar el tercio excluido (cayendo en situaciones “*gappy*” de vacíos de verdad) y declarar la no verdad y no falsedad de la paradoja de Curry con la lógica paracompleta puede ayudar a comprender la dinámica de esta paradoja, no todas las lógicas paracompletas lo pueden lograr. Asimismo, si bien la otra estrategia que consiste en dejar sin efecto el principio de no contradicción (cayendo en situaciones “*glutty*” de llenuras de verdad), rechazando el *Modus Ponens* y modificando la relación condicional (apelando a mundos no normales)

puede dar pistas sobre cómo funciona esta paradoja, no todas las lógicas paraconsistentes la logran derrotar.

e. La premisa de la paradoja de Curry tiene rastros de ambigüedad e irrelevancia.

La expresión condicional de Curry (“Si esta oración es verdadera, entonces B”) es, en principio, ambigua pues puede dar lugar a confusiones en el lenguaje natural. Puede la autorreferencia aludir a solo el antecedente del condicional Curry o a toda la expresión entera. Este tema ya fue aclarado. Además, también hay irrelevancia (en el sentido no formal) entre el antecedente y el consecuente de la condicional Curry. No hay alguna relación entre “Esta oración ($A \rightarrow B$) es verdadera” y “B”.

f. No toda lógica de la relevancia puede frenar la paradoja de Curry.

También se pensaba que inspeccionando la relación de relevancia entre premisas y conclusión de la paradoja de Curry esta podría resolverse. Pero sucede que la expresión paradójica de Curry cumple con ambas condiciones formales de relevancia. Cumple con la condición semántica porque en la fórmula: “[$C = (\text{Tr} \langle C \rangle \rightarrow B)$] $\rightarrow B$ ” tanto la conclusión como la premisa comparten variables, a saber, B. Y cumple con la condición sintáctica porque en dicha fórmula es factible probar B a partir de $C = (\text{Tr} \langle C \rangle \rightarrow B)$. En consecuencia, la lógica relevante tampoco puede hacerle frente.

g. La lógica pragmática de la conversación de Grice puede disolver la paradoja producida por el enunciado de Curry implicando de este su consecuente considerando que

constituye una implicatura conversacional que burla una máxima de cantidad.

Hay que advertir que nosotros no consideramos que la paradoja de Curry provenga de un problema pragmático más que un problema lógico. Lo que nos parece es que siendo un problema de lógica formal este puede ser recontextualizado dentro del mundo de la pragmática. Es decir, la expresión condicional de Curry puede ser analizada bajo la lupa de la lógica de la conversación de Paul Grice y esta lógica se enmarca dentro de la pragmática. Lo que se sostiene es que habría ciertas situaciones concretas bajo las cuales se afirmaría la expresión de Curry. Y lo que uno querría implicar conversacionalmente al afirmar que “Si tengo razón en lo que digo entonces el Perú es uno de los países con mayor crecimiento económico” es que el Perú es uno de los países con mayor crecimiento económico. Esto sucede porque

1. La forma gramatical de la paradoja de Curry no coincide con su forma lógica.
2. La expresión condicional Curry implica su consecuente (porque la expresión de Curry se puede reducir a una conjunción).

De este modo, la paradoja se disuelve.

CUESTIONARIO # 6

1. ¿Qué tipo de paradoja es la paradoja de Curry si es expresado de este modo “Si este condicional es verdad entonces A”?

- a) Semántica.
- b) Pragmática.
- c) Matemática.

2. ¿Qué herramientas se utilizan para abordar la paradoja de Curry?

- a) Lógicas clásicas y no clásicas.
- b) Teoría de conjuntos y teoría de tipos.
- c) Análisis semántico de paradojas.

3. ¿Qué elemento caracteriza a la paradoja de Curry?

- a) Se basa en autorreferencia.
- b) Su rechazo del principio de razón suficiente.
- c) Su dependencia de la lógica cuántica.

4. ¿Qué enfoque permite examinar la paradoja de Curry para disolverla?

- a) Perspectiva pragmática.
- b) Perspectiva dialéctica.
- c) Perspectiva intuicionista.

5. ¿Qué paradojas están estrechamente relacionadas con la de Curry?

- a) Paradoja del mentiroso y paradoja de Russell.
- b) Paradoja de Yablo y paradoja de Cantor.
- c) Paradoja del puente y paradoja de Grelling.

6. ¿Qué lógica se podría usar para denunciar que no hay elementos comunes entre antecedente y consecuente de la paradoja de Curry?

- a) Lógica paraconsistente.
- b) Lógica clásica.
- c) Lógica relevante.

7. ¿De qué carece la paradoja de Curry en comparación con la del mentiroso?

- a) No deriva necesariamente en contradicciones.
- b) Ausencia de límites entre niveles semánticos.
- c) Contradicción en conjuntos autoaplicativos

8. ¿Qué relación tiene la paradoja de Curry con la falacia de énfasis?

- a) Ambas asumen como verdad la información que difunden.
- b) Ambas dependen de axiomas formales.
- c) Ambas se resuelven mediante lógica modal.

9. ¿En qué consiste la trivialidad deductiva que genera la paradoja de Curry?

- a) Se puede probar cualquier enunciado.
- b) Se puede probar un solo enunciado.
- c) No se puede probar algún enunciado.

10. ¿Qué lógica no clásica no se usa en esta ocasión para analizar la paradoja de Curry?

- a) Lógica paracompleta.
- b) Lógica relevante.
- c) Lógica epistémica.

Solucionario: 1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6c, 7a, 8a, 9a, 10c.



CAPÍTULO 7

USO DE LAS PARADOJAS PARA ENSEÑAR LÓGICAS NO CLÁSICAS

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo relacionar a las paradojas con las lógicas no clásicas. El asunto central de este capítulo se basa en la enseñanza de las lógicas no clásicas. El siguiente sería el orden de los pasos a seguir para aplicar una estrategia didáctica que tenga por meta enseñar el tema de las lógicas no clásicas. Primero, el alumno debe conocer bien algunas principales características de la proposición, así como fórmulas clave de la lógica clásica. Segundo, el docente mediante la explicación de alguna una paradoja debe asombrar al alumnado. Tercero, el profesor debe seleccionar alguna lógica no clásica desde la cual se pueda estudiar el problema sugerido por la paradoja. De esta manera, la enseñanza de algunas lógicas no clásicas sería más eficiente y los alumnos entenderían de mejor modo lo que significa investigar en el campo de la lógica.

1. Lógica formal

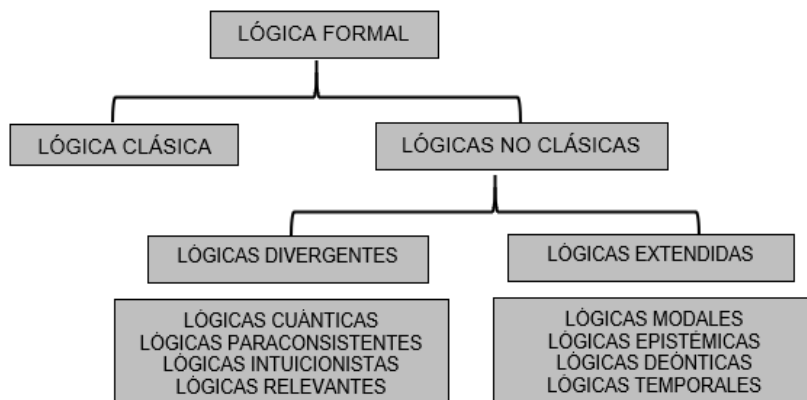
La lógica formal analiza la validez de la inferencia, pero considerando criterios formales, es decir, reglas y principios fundamentados en las estructuras abstractas de las expresiones y que explican la relación de consecuencia lógica. Podemos dividir la lógica formal en lógica clásica y no clásica.

La lógica clásica, principalmente, respeta los tres principios lógicos y analiza expresiones sirviendo a la función informativa del lenguaje. En cambio, las lógicas no clásicas no respetan alguno de los tres principios lógicos y/o analizan expresiones sirviendo a otras funciones del lenguaje (como la directiva o expresiva).

Las lógicas no clásicas a su vez se pueden dividir en dos partes: lógicas divergentes y lógicas extendidas¹⁰³. Las lógicas divergentes consideran que la lógica clásica debe ser renovada completamente y, en ese sentido, cuestionan sus principios o teoremas más básicos. Las lógicas extendidas colaboran con la lógica clásica realizándole algunos ajustes, por ejemplo, en cuanto al vocabulario usado.

¹⁰³ Esta es una división genérica pues en realidad las lógicas divergentes y las lógicas extendidas no son excluyentes ya que hay lógicas híbridas, por ejemplo, podría elaborarse una lógica deóntica de base paraconsistente como ocurre en Masaveu (1997).

Figura 5
Clasificación de la lógica formal



Fuente: Elaboración propia

1.1. ¿Qué conocimientos debería tener un alumno?

Existen ideas que los estudiantes que han llevado un curso de lógica deberían conocer como parte de su cultura general. Varias de estas ideas se refieren a las características esenciales de la proposición. Así, los que han aprobado un curso de lógica pueden afirmar que la proposición debe ser bivalente, es decir, solo puede ser verdadera o falsa.

No es posible que sea verdadera y falsa o que sea ni verdadera ni falsa. Asimismo, la proposición debe tener un significado claro y, en ese sentido, no debe contener términos vagos, es decir, con significado impreciso. Por ejemplo: “Pedro es alto” (pero ¿en comparación con quién o qué?), “Hace calor” (pero, ¿qué temperatura exactamente o en qué contexto?), “María tiene bastante dinero” (pero ¿en qué contexto o comparado con quién?), “Esa prenda es roja” (pero, ¿qué tonalidad

exactamente?), “Alberto vive cerca” (pero, ¿qué tan cerca o en relación con qué distancia?), “La película fue larga” (pero, ¿qué duración se considera larga?), etc. Además, la proposición es objetiva pues informa sobre el mundo y, en ese sentido, está en la función informativa del lenguaje. Por ende, la lógica clásica no acepta expresiones lingüísticas que estén bajo la función directiva. Finalmente, la proposición no puede hablar sobre el futuro ya que el futuro es contingente, esto es, nadie sabe a ciencia cierta si mañana habrá, por mencionar un caso, una guerra con el país vecino o no. Por eso, “Mañana habrá una guerra” no es verdadera ni falsa hoy, sino más bien sería posible. Pero, defender esto último niega la bivalencia ya antes mencionada. Por este motivo, se rechaza que las proposiciones se refieran al futuro.

La lógica posee tres principios que, aunque han perdido el rango metafísico que antes se le otorgaba, mantienen cierta vigencia al ser consideradas las expresiones tautológicas más simples que se pueden formular con una sola variable proposicional. Así, se tiene el principio de tercio excluso, según el cual una proposición es verdadera o falsa y no hay una tercera alternativa. Asimismo, se acepta el principio de no contradicción, de acuerdo al cual es imposible que una proposición sea verdadera y falsa a la vez.

En cuanto a los operadores lógicos, todo alumno que se precie de saber lógica debe conocer la tabla de verdad de la condicional, en ese sentido, debe saber que dicha condicional solo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Al respecto de las equivalencias notables, es necesario recordar la propiedad distributiva, la misma que tiene varias formas, pero la

siguiente sobre todo es relevante tomar en cuenta: $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$. También, hace falta tener en mente a la doble negación: $\sim\sim p \leftrightarrow p$. Por otro lado, en lo que respecta a las implicaciones notables, destaca la regla de la adición, según la cual, $p \rightarrow (p \vee q)$.

Finalmente, considerando el tema del método de deducción natural, destaca el principio de explosión, el mismo que afirma que si se acepta una contradicción, toda fórmula construible (fórmula bien formada) se vuelve inmediatamente un teorema. Además, una de los modos de demostración indirecta, a saber, la prueba por reducción al absurdo se basa en la siguiente estructura lógica: si niego la conclusión de una inferencia y luego, al incluirla como parte de las premisas, se genera una contradicción, entonces debo negar nuevamente la negación de la conclusión de la inferencia, esto es, $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim\sim p$. Todo lo anterior revela lo que debe saber un alumno que ha aprobado un curso de lógica.

2. Definición de paradoja

Las paradojas son definidas por Clark (2009) como aquellas argumentaciones en las que, partiendo de premisas aceptables y a través de métodos aceptables de raciocinio, se derivan conclusiones inaceptables. Por ejemplo, prestemos atención a la siguiente paradoja planteada por Dwight Schrute en la serie de comedia *The Office*: Jim es mi enemigo. Sin embargo, dado que Jim es también su propio peor enemigo, y considerando que el enemigo de mi enemigo es mi amigo, se podría concluir que Jim es mi amigo. Pero, si Jim es mi amigo y al mismo tiempo su propio peor enemigo, entonces, de acuerdo con la idea de que

el enemigo de mi amigo es mi enemigo, se concluye que Jim sigue siendo mi enemigo. Así, se demuestra que Jim es tanto mi amigo como mi enemigo. Este razonamiento cumple con los criterios de una paradoja, ya que parte de premisas razonables, sigue un proceso lógico aceptable, pero llega a una conclusión que parece contradictoria o inaceptable.

Otros pensadores como Piscoya (1995b) y García Zárate (2007) entienden por paradoja una situación provocada por una afirmación que lleva a una contradicción: si se supone que es verdadera, resulta ser falsa, y si se supone que es falsa, resulta ser verdadera. Ejemplos clásicos que ilustran esta definición son las conocidas paradojas del mentiroso y de Russell.

3. La importancia del estudio de las paradojas

La importancia del estudio de las paradojas radica en que constituyen desafíos a nuestra mente. Sencillamente, no podemos creer que pensando racionalmente lleguemos a conclusiones irracionales o contraintuitivas. La lógica se vuelve más interesante cuando se estudia el tema de las paradojas. En ese sentido, una paradoja estimula nuestro pensamiento crítico. Por ejemplo, podemos mencionar a la paradoja de la persistencia de la identidad en el tiempo, también conocida como la paradoja del barco de Teseo (Plutarco, 1985). Si a un objeto compuesto (el barco de Teseo) le cambiamos cada uno de sus componentes por otros similares, ¿este objeto resultante sería el mismo que el objeto inicial? Asimismo, si cada uno de esos componentes desechados los usamos para reconstruir el objeto en cuestión (el barco de Teseo) ¿cuál de estos objetos sería el objeto original (el barco de Teseo)? Esta paradoja en el fondo nos

plantea esta otra pregunta: ¿cómo sabemos que las cosas son las mismas si siempre están cambiando? Nosotros mismos tenemos rasgos diferentes a lo largo de nuestra vida. Cuando éramos niños no teníamos una gran estatura y nuestras preocupaciones estaban más involucradas con las necesidades de aprender, comer y jugar. Hoy, en cambio, somos muy diferentes pues hemos crecido y lo que más nos preocupa es cómo pagar las cuentas a fin de mes. ¿Podemos afirmar que somos la misma persona que éramos cuando fuimos niños o niñas? La respuesta es problemática. Si decimos que sí somos la misma persona, ¿cómo explicamos coherentemente lo tremendamente diferentes que somos hoy a nivel físico y mental? Si decimos que no somos la misma persona, entonces, ¿quiénes somos?

Algunos podrán manifestar que las paradojas son una pérdida de tiempo o que son solo problemas aparentes y no reales, pues se basan más en un juego de palabras que en algo sustancial. Sin embargo, el desafío ya fue planteado y la historia de los grandes debates siempre se han involucrado con las paradojas. Por ejemplo, el tema metafísico de la explicación del cambio se relacionó con dos paradojas. Por un lado, la de Heráclito, que planteaba que todo cambia y, por ende, no podemos afirmar que el río en el que nos bañamos hoy será el mismo que el río en el que nos volveremos a bañar mañana. Por otro lado, la paradoja de Aquiles y la tortuga de Zenón de Elea, discípulo de Parménides, con la cual demostró que, en realidad, no existe el movimiento porque se puede probar que el rápido Aquiles nunca alcanzará a una lenta tortuga. Otro ejemplo lo tenemos en la época medieval acerca de la demostración de la existencia de Dios. Por un lado, Anselmo probó mediante su argumento

ontológico que Dios existe. Por otro lado, la paradoja de Dios y la piedra representa un obstáculo conceptual importante para definir uno de los rasgos esenciales de Dios, a saber, su omnipotencia y, en consecuencia, su carácter realmente divino. Finalmente, en el siglo XX se han producido paradojas incluso en el interior de las teorías físicas más complejas. Por ejemplo, la mecánica cuántica plantea un problema denominado la paradoja del gato de Schrödinger¹⁰⁴ con la cual se puede plantear una situación en la cual un gato está vivo y muerto a la vez, mientras no se abra la caja dentro de la cual está dicho animal bajo ciertas condiciones. Incluso Einstein para explicar alguno de sus principios planteó la paradoja de los hermanos gemelos¹⁰⁵, que trata acerca de lo que pasa con el tiempo cuando un objeto se mueve a velocidades muy altas.

¹⁰⁴ La paradoja del gato de Schrödinger trata acerca de un experimento que busca explicar la naturaleza del mundo cuántico. De acuerdo a Mora (2020b, pp. 43-44), la superposición cuántica se refiere a la situación en la que un objeto presenta simultáneamente dos o más valores posibles de una propiedad observable. Este fenómeno se ilustra en la paradoja del gato de Schrödinger: un gato se encuentra dentro de una caja cerrada que contiene un átomo radiactivo, un contador Geiger y una ampolla de cianuro conectada a un mecanismo que la rompe si el contador detecta partículas radiactivas. Si el átomo emite una partícula, el detector activará el mecanismo, rompiendo la ampolla y liberando el cianuro, lo que matará al gato. Si no se emite la partícula, la ampolla permanece intacta y el gato sigue vivo. Dado que la probabilidad de emisión es del 50%, mientras la caja permanezca cerrada, el gato se encuentra en un estado de superposición, es decir, "vivo y muerto al mismo tiempo". Solo al abrir la caja se determina definitivamente su estado.

¹⁰⁵ La paradoja de los hermanos gemelos fue formulada por Einstein (1911) para explicar cómo afecta el tiempo a aquellos cuerpos que van a la velocidad de la luz. Si tenemos dos hermanos gemelos en la Tierra y uno de ellos viaja hacia el espacio a una velocidad cercana a la de la luz, entonces pasado veinte años después si reunimos a los dos hermanos notaremos que el viajero espacial luce casi igual a como se fue mientras que su hermano se vería notoriamente más viejo.

4. Las paradojas como motivaciones para enseñar lógicas no clásicas

El estudio y la profundización de la lógica no clásica ha generado progreso en el campo de la lógica en general. Curiosamente, las paradojas podrían jugar un papel fundamental para la enseñanza de este tipo de lógicas. Así, las paradojas semánticas (como la del mentiroso) pueden ser enfocadas desde la lógica paracompleta. Explicaremos esto enseguida.

La paradoja del mentiroso se expresa de un modo tremendamente simple. Alguien pronuncia la siguiente y única expresión: «Lo que estoy diciendo ahora es falso». Dicha expresión entrecomillada, que llamaremos oración M, ¿es verdadera o es falsa? Resolver ese asunto era un verdadero desafío porque cualquier respuesta llevaba a un contrasentido.

Si suponemos que lo dicho es una verdad, entonces es falsa pues la expresión afirma de sí misma que es falsa. Así, por reducción al absurdo, podemos afirmar que no es verdadera. Y si asumimos que es falsa, entonces es verdadera porque estaríamos confirmando lo que la expresión dice sobre sí misma. Así, por reducción al absurdo, podemos afirmar que no es falsa. Estamos ante una expresión que no es verdadera ni falsa y eso, la lógica clásica no lo admite, pues va en contra del principio del tercio excluso¹⁰⁶.

¹⁰⁶ Es posible también probar que la clásica expresión del mentiroso «Esta oración es falsa» es una expresión verdadera y falsa a la vez y en este caso, se debe afirmar que el mentiroso atenta contra el principio de no contradicción. Si se opta por esta vía, se recomienda intentar diseñar una lógica paraconsistente que sea capaz de soportar la contradicción.

Precisamente, una lógica que sería adecuada aplicar sería la lógica paracompleta. Escribe Mora:

se dice que un sistema de lógica es paracompleto cuando no acepta el principio del tercero excluido (es decir, no acepta este principio: $A \vee \sim A$). Así, puede suceder que tanto una fórmula como su negación asuman un mismo valor de verdad. Por ejemplo, imaginemos que un observador está viendo una manzana verde pero que está lo suficientemente lejos como para no distinguirla. Dado que él no puede ver el color, la oración “La manzana es verde” sería falsa desde su perspectiva; pero también “La manzana no es verde” es falsa puesto que, efectivamente, esa fruta tiene ese color. (...) Otro ejemplo de este tipo de frases sería: “José conoce la India”. Si José nunca estuvo en la India, esa frase es falsa, pues nunca puso un pie allí. Pero si, a pesar de que nunca ha estado allí, estudió la historia de la India por libros, películas, viendo muchas fotos de la India y hasta hizo amigos indios por redes sociales la negación de esa oración también sería falsa. Así pues, tanto “José conoce la India” como “José no conoce la India” son ambas falsas. (Mora, 2020a, pp. 57-58)

Esta lógica es aquella que viola alguna de las formulaciones del principio del tercero excluido. Así, si este principio afirma que, si una proposición es verdadera, su negación debe ser falsa, entonces la lógica paracompleta sostiene que es posible que existan vacíos (*gaps*) de verdad. De este modo, podría afirmarse que sostener que “cierta proposición α es verdad” es falso y que “cierta proposición α es falsa” también es falso, abriendo así la posibilidad de otra opción, a saber, las

proposiciones también podrían ser ni verdaderas ni falsas como, por ejemplo, indeterminadas.

La paradoja de Cantor generó tanta oposición que dio lugar al movimiento intuicionista liderado por Brouwer, dentro del cual tiempo después se gestaría la lógica intuicionista. Desarrollaremos esto con más detalle.

Georg Cantor (2011) fue un matemático alemán conocido como el creador de la teoría de conjuntos. En el desarrollo de esta teoría, identificó una paradoja fascinante. Para comprenderla plenamente, primero es necesario familiarizarnos con algunos conceptos básicos. Un conjunto o clase es una colección de elementos, y estos elementos pueden agruparse en conjuntos más pequeños llamados subconjuntos. Por ejemplo, si el conjunto A contiene los elementos $\{1,2\}$, entonces su conjunto de subconjuntos, conocido como conjunto potencia ($Pot(A)$), incluye $\{\{1\},\{2\}, A, \emptyset\}$. Este principio, conocido como el teorema de Cantor, establece que dado un conjunto A con n elementos, su conjunto potencia tendrá 2^n elementos, lo que significa que siempre contiene más elementos que el conjunto original.

Otro concepto clave es la relación de inclusión. Si un conjunto A está incluido en un conjunto B , entonces el número de elementos de A es menor o igual al de B . Con estos fundamentos, podemos abordar la paradoja de Cantor.

La paradoja surge al considerar el conjunto universal U , que contiene todos los objetos y conjuntos existentes, incluyendo al propio U como uno de sus elementos. También incluiría su conjunto potencia, $Pot(U)$. Aquí aparece la contradicción:

1. Según el teorema de Cantor, $Pot(U)$ tiene más elementos que U .
2. Sin embargo, $Pot(U)$, como un conjunto, estaría incluido en U , lo que implicaría que su número de elementos es menor o igual al de U .

Estas afirmaciones contradictorias constituyen la llamada "paradoja de Cantor", que desafía nuestra comprensión tradicional de los conjuntos y sus relaciones.

Por este motivo, cuando se trate de la paradoja de Cantor y se mencione al conjunto universal que, de cierto modo, alude al concepto de infinito, se debería también aprovechar ese momento de aprendizaje para hablarles a los alumnos acerca de la lógica intuicionista, la misma que solo considera como prueba valedera a las que se pueden construir. La idea es que la lógica clásica solo se aplica a ámbitos finitos y el error de los cantorianos, a decir de Brouwer, era que pretendían aplicar esa misma lógica, pero a ámbitos de lo infinito (recordemos la preferencia de los intuicionistas por el infinito potencial antes que por el actual). La lógica intuicionista busca modelar el razonamiento intuicionista presente en las matemáticas intuicionistas. Así, básicamente, rechaza el tercio excluso, la doble negación y cualquier disyunción que no tenga probada la verdad de al menos uno de sus miembros. Además, esta lógica no acepta la reducción al absurdo y, en vez de ello, prefiere las demostraciones que indiquen paso a paso cómo se logra construir la conclusión. Por ejemplo, para mostrar que en una isla hay un tesoro nadie aceptaría una prueba por reducción al absurdo en este caso. De lo que se trata es de mostrar la ubicación del tesoro mediante un mapa. La misma crítica realizan los intuicionistas.

Aunque la paradoja del mentiroso de por sí es muy atractiva y su estudio puede provocar las más profundas reflexiones, existen otras paradojas que también vale la pena revisar. Una de esas paradojas es la de Russell, específicamente, aquella relacionada a las clases (Russell y Whitehead, 1910). Para que esta paradoja tenga lugar, es fundamental comprender el axioma de comprensión. Este axioma establece que para cada propiedad dada existe una clase formada por todos los elementos que cumplen esa propiedad. En otras palabras, cualquier propiedad coherente puede usarse para definir una clase. Por ejemplo, la propiedad "ser campeón de la copa del mundo" agrupa a todos los objetos que cumplen con ese criterio, es decir, los equipos campeones de la copa del mundo.

La paradoja aborda el concepto de clases (o conjuntos), entendidas como colecciones de elementos, y distingue entre dos tipos fundamentales de clases: aquellas que se incluyen a sí mismas como uno de sus elementos y aquellas que no lo hacen. Por ejemplo, la clase universal, que agrupa a todas las clases, se incluye a sí misma, ya que también es una clase y, por lo tanto, forma parte de sus propios elementos.

Ahora bien, imaginemos dos agrupaciones: una que reúne todas las clases que se contienen a sí mismas y otra que agrupa todas las clases que no se contienen a sí mismas. Pensemos, por ejemplo, en la clase de los lápices. Esta clase no se contiene a sí misma porque solo agrupa lápices, no clases, lo que la hace parte de la categoría de clases que no se contienen a sí mismas.

La pregunta central y paradójica surge al considerar esta última agrupación: la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas. ¿Se contiene a sí misma o no?

1. **Primera opción:** Si se contiene a sí misma, entonces debería cumplir con la condición de no contenerse a sí misma. Pero esto lleva a una contradicción, ya que, si se contiene, no debería hacerlo. Usando principios de lógica, se concluye que no se contiene a sí misma.
2. **Segunda opción:** Si no se contiene a sí misma, entonces no cumpliría la condición, lo que significa que debería contenerse a sí misma. Esto también resulta contradictorio, ya que, si no se contiene, debería hacerlo. Por la misma lógica, se concluye que sí se contiene a sí misma.

En resumen, esta clase simultáneamente se contiene y no se contiene a sí misma, generando una situación paradójica. Una vez se ha logrado impresionar a la audiencia se debe aprovechar el estupor para hablar un poco acerca de aquella lógica que permite en cierto modo la contradicción. Así, se precisa entrar en el terreno de la lógica paraconsistente. Escribe Mora:

en las lógicas paraconsistentes no es válido el principio de no contradicción (es decir, no aceptan este principio: $(A \wedge \sim A)$). Por ende, tanto una proposición A como su negación $\sim A$ pueden ser verdaderas sin causar trivialidad en el sistema lógico, es decir, sin dar lugar a que cualquier fórmula bien formada sea, también, un teorema (...). Ahora bien, la inconsistencia (o contradicción) no es algo poco común, sino que más bien forma parte del mundo

natural. Por ejemplo, hay contradicciones en la mecánica cuántica, en la descripción de Bohr sobre el comportamiento del átomo, en las paradojas de El Mentiroso, de Russell entre otras. (...) Finalicemos con un ejemplo más sencillo. Cuando uno está de cumpleaños ¿es un año más o un año menos? Claramente se puede notar que es posible aceptar ambas opciones a pesar de ser contradictorias entre sí. (Mora, 2020a, pp. 58-59)

Así, el principio de no contradicción afirma que, si una proposición es verdadera, su negación no puede ser también verdadera. En otras palabras, las contradicciones no pueden ser verdaderas. Frente a esto, entonces la lógica paraconsistente sostiene que es posible que existan saturaciones (*glutty*) de verdad. De este modo, podría afirmarse que sostener que “cierta proposición α es verdad” es verdad y que “cierta proposición α es falsa” también es verdad. La lógica paraconsistente se caracteriza por rechazar el principio de no contradicción, pero sin caer en la trivialidad, es decir, sin permitir que toda proposición se vuelva verdadera (hecho también conocido como principio de explosión). Esta lógica podría servir para explicar la idea de no trivialización de una teoría a pesar de la existencia de contradicciones dentro de la misma.

Las paradojas de la implicación material y de la implicación estricta podrían ser utilizadas para enseñar detalles técnicos de la lógica de la relevancia. Esto se comprenderá mediante la siguiente exégesis. Las paradojas de la implicación material surgen a partir del análisis de la tabla de verdad de la condicional. Por ejemplo, de acuerdo a esa tabla una proposición falsa implicará cualquiera otra. Para solucionar este tipo de impases, se aplican consideraciones de la lógica modal, dando lugar a la

implicación estricta. Sin embargo, esto genera el problema de las paradojas de la implicación estricta. Por ejemplo, una proposición imposible implicará estrictamente cualquier otra. Enseguida, podemos apreciar las paradojas mencionadas. Las dos primeras corresponden a las paradojas de la implicación material y las dos últimas corresponden a las paradojas de la implicación estricta.

$$1. p \models (q \rightarrow p) (...)$$

Lo verdadero se sigue de cualquier cosa

$$2. p \models (\sim p \rightarrow q) (...)$$

De lo falso se sigue cualquier cosa

$$3. p \models (q \vee \sim q) (...)$$

Lo necesario se sigue de cualquier cosa

$$4. (p \wedge \sim p) \models q (...)$$

De lo contradictorio se sigue cualquier cosa (...) (Mora, 2020a, pp. 89-90)

Ante esto la lógica de la relevancia pretende imponer limitaciones a la implicación.

la lógica de la relevancia se presenta como una lógica no clásica porque busca que en los razonamientos lógicos no existan relaciones arbitrarias y discordantes. Lo que busca es que las relaciones intra-lógicas de un argumento tengan algo más de coherencia. Esta lógica, también llamada lógica relevante o del entrañamiento, rechaza la verdad de condicionales en las que el antecedente es irrelevante para el consecuente al no compartir términos con él. (...). La idea es que entre premisas y conclusiones los contenidos semánticos no sean diferentes, sino de alguna

forma vinculados. Para ello, se necesita que premisa y conclusión tengan al menos una variable proposicional en común. Asimismo, las premisas que aparecen como antecedentes, deben ser usadas para lograr derivar la conclusión con el fin de que guarden entre sí cierta relación. (Mora, 2020a, pp. 82-83)

Así, la lógica relevante propone dos condiciones de relevancia, una sintáctica y otra semántica. De acuerdo a la condición sintáctica, una implicación es relevante si desde el antecedente puede llegarse hasta el consecuente mediante razonamientos lógicos. De acuerdo a la condición semántica, una implicación es relevante si tanto el antecedente como el consecuente comparten al menos una misma variable. Así, las anteriores paradojas de la implicación material y estricta mediante estas exigencias de la lógica relevante simplemente no se pueden formular (Anderson y Belnap, 1975).

La paradoja del montón (o *sorites*) podría servir como pretexto para tratar acerca de la lógica difusa. En lo que sigue explicaremos cómo. La paradoja del montón surge a partir de pensar acerca de cuántos granos de arena hacen un montón de arena. Así, si estamos ante un montón de arena y quitamos 1, 2, 3, 4 o 5 granos todavía seguiría siendo un montón. Por ende, aunque quitemos un gran número de granos, podemos afirmar que estamos ante un montón. Precisamente, es el término “montón” el que genera confusiones al no ser definido adecuadamente.

Frente a esta paradoja la lógica difusa puede sernos muy útil. De acuerdo a Mora: “La lógica difusa, borrosa o de los enunciados vagos, se vincula directamente al estudio de la vaguedad, es decir, el significado difuso de las unidades lingüísticas. (...)”. (Mora, 2022, p. 261). La lógica

difusa trata de razonar acerca de ciertos conceptos vagos que no tienen bien definidas sus características. Por ejemplo, ¿cuándo un niño deja de ser niño? Quizás cuando cumple 10 años, el niño está a punto de dejar de ser un niño. Así, conforme pasan los días, el enunciado «Este es un niño» va perdiendo verdad, de tal forma que, a mayor tiempo transcurrido, la falsedad del enunciado anterior va aumentando.

De acuerdo a Almache: “La lógica difusa utiliza enunciados que no son ni totalmente ciertos ni completamente falsos y se aplica a expresiones que pueden tomar un valor de veracidad de todo un conjunto de valores comprendido entre dos extremos, la verdad absoluta y la falsedad total” (2013, p. 93). En ese sentido, la lógica difusa trata con distintos valores de verdad comprendidos entre la total verdad y la total falsedad. De este modo, rompe con el principio del tercio excluso y, así, podría ser utilizada para analizar la paradoja *sorites*.

La paradoja de Ross y la del buen samaritano podrían ser usadas para motivar el desarrollo de una clase sobre lógica deóntica. Sustentaremos esto a continuación. La paradoja de Ross surge como una crítica al uso de la regla de la adición en contextos deónticos. Por ejemplo, si es obligatorio que ayude al prójimo, entonces es obligatorio que lo ayude o que lo perjudique. El anterior razonamiento puede probarse en cierta lógica deóntica. Por ende, tendremos que restringir algunas reglas dentro de esa lógica para que esta paradoja no se pueda producir.

La paradoja del buen samaritano se formula del siguiente modo. Consideremos que, si B es consecuencia lógica necesaria de A, entonces A implica estrictamente a B. Ahora bien, usando el lenguaje de la lógica modal y el de la lógica deóntica se puede expresar lo siguiente:

(*) «A implica estrictamente a B y es obligatorio que A.

Entonces es obligatorio que B».

En términos formales: $[(A \Rightarrow B) \wedge O A] \rightarrow O B$

Esto parece tener sentido. Si cada vez que haces A, resulta estrictamente B, y estamos diciendo que es obligatorio que A, entonces esencialmente estamos diciendo que es obligatorio que B. Sin embargo, consideremos las siguientes proposiciones:

A = «El buen samaritano ayudó a Beto quien ha sido asaltado».

B = «Beto ha sido asaltado».

Claramente, B es una consecuencia lógica necesaria de A. Es decir, A implica estrictamente a B. Por ende, $A \Rightarrow B$, pues el buen samaritano no puede haber ayudado a Beto sin que Beto hubiera sido asaltado en primer lugar. Bien, ahora considere la declaración.

O A = “Es obligatorio que el buen samaritano ayude a Beto quien ha sido asaltado”.

Esto parece ser algo que es cierto. Entonces, ¿qué resulta de aplicar la afirmación (*)?

O B = “Es obligatorio que Beto haya sido asaltado”.

Así se puede notar que hay un problema aquí, pues no tenemos que aceptar que es obligatorio que Beto haya sido asaltado ni ningún otro delito. Eso más bien debería estar prohibido. Nadie debería ser asaltado. Esta es la paradoja del buen samaritano. (Åqvist, 1967)

Dado que entramos a contextos donde se usan operadores deónticos, la lógica más indicada para analizar estas paradojas podría ser la lógica deóntica. De acuerdo a Mora:

(...) la lógica deóntica puede servir para modelar una forma de hablar rigurosa y específica sobre las normas. (...)

La lógica deóntica estudia las relaciones lógicas de inferencia entre normas permisivas, prohibitivas u obligatorias, es decir, entre proposiciones prescriptivas vinculadas al deber ser y, así, permite determinar con mayor fundamento las consecuencias lógicas de las expresiones normativas de un sistema dado (...) (2022, p. 180)

Así, la lógica deóntica se usa para evaluar normas jurídicas pues es una variación de la lógica modal que en vez de operadores modales utiliza operadores deónticos tales como «obligatorio», «permitido» y «prohibido».

Las paradojas de la física cuántica (como el contraintuitivo principio de incertidumbre de Heisenberg o el caso del gato de Schrödinger) sugirieron la creación de la lógica cuántica y, precisamente, por este motivo, para introducir a los alumnos al aprendizaje de la lógica cuántica se podría recurrir a estas paradojas. Esto lo veremos enseguida.

De acuerdo a Mora:

La lógica cuántica se podría definir como el conjunto de reglas algebraicas (formales y estructurales) que rigen las operaciones para combinar los elementos del vocabulario lógico vinculándolos a acontecimientos físicos que se observan a escalas atómicas en el micromundo cuántico. (2020b, p. 38)

La lógica cuántica pretende reformular las leyes lógicas del mundo macrofísico para que guarden coherencia con los resultados de los experimentos a nivel microfísico. Así, por ejemplo, esta lógica deja sin

efecto el principio de distribución, según el cual, $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

La lógica cuántica debe rechazar este principio porque no se aplica a contextos cuánticos cuando, por ejemplo, estamos ante un electrón que tiene tal velocidad y puede estar dentro de tal lugar o fuera de tal lugar. Si a partir de lo anterior, deducimos usando el principio de distribución que, tal electrón tiene tal velocidad y está dentro de tal lugar o tal electrón tiene tal velocidad y está fuera de tal lugar estaríamos atentando contra el principio de incertidumbre de Heisenberg, según el cual, no podemos saber al mismo tiempo la posición y la velocidad de una partícula subatómica. Enseguida, explicamos formalmente lo anterior. Planteamos la propiedad distributiva: $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, donde p = la partícula tiene tal velocidad, q =la partícula está en tal lugar, r =la partícula no está en tal lugar. Como se puede notar r equivale a $\sim q$, por ende:

$$[p \wedge (q \vee \sim q)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)].$$

$$p \wedge T \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)].$$

$$p \qquad \qquad F \quad \vee \quad F$$

$$p \qquad \qquad F$$

Como podemos apreciar, el miembro izquierdo del bicondicional se reduce a p mientras que el miembro derecho se reduce a una falsedad. Por ende, la equivalencia denominada propiedad distributiva no se cumple en la lógica cuántica.

Las paradojas de los viajes en el tiempo pueden servir para investigar la naturaleza misma del tiempo con ayuda de la lógica temporal. En lo que sigue fundamentamos esta afirmación. Básicamente,

el problema con los viajes en el tiempo se relaciona con la paradoja del abuelo, según el cual, si un viajero retrocede en el tiempo hasta la época de su abuelo cuando este era niño y lo asesina, entonces este viajero no llegará a nacer, pero si fuera así, dicho viajero no haría tal viaje y, el abuelo seguiría vivo y, en consecuencia, el viajero podría nacer y esto posibilitaría, de nuevo, su fatal viaje al pasado. Podríamos usar la lógica temporal para tratar de entender lo que sucede en la anterior paradoja. Escribe Mora:

Ya sabemos que, en lógica clásica proposicional, dos enunciados como «está nevando» y «nevará» se formalizan o bien como dos proposiciones diferentes (una sería p y la otra q) o como la misma proposición (a saber, p). Ahora contamos con una herramienta más precisa, a saber, la lógica temporal la cual nos permitirá formalizar los enunciados anteriores como un mismo hecho en dos instantes diferentes, es decir, nos permitirá distinguir si un hecho tiene lugar en algún momento del tiempo, ya sea presente, pasado o futuro. Para ello, se introducirán, nuevos operadores referidos al tiempo y, a la vez, se perderán las funciones de verdad básicas. (...). La lógica temporal se usa en filosofía con el objetivo de analizar y esclarecer ciertos conceptos tales como, por ejemplo, la causalidad, la identidad, la necesidad histórica y la idea de sucesos. Dicha lógica puede entenderse como una teoría de inferencias que dependen del significado de términos temporales como «será el caso que», «ha sido el caso que», etc. (...)

El lenguaje propio del sistema de lógica temporal consta de cuatro operadores monarios (G , H , F y P) (...).

G se interpreta como «será siempre en el futuro que»,
 H se interpreta como «ha sido siempre en el pasado que»,
 F se interpreta como «será alguna vez en el futuro que», y
 P se interpreta como «fue alguna vez en el pasado que». (2022, pp. 156-157)

La lógica temporal es una variante de la lógica modal que en vez de usar operadores modales utiliza operadores temporales tales como «siempre será el caso», «siempre ha sido el caso», «en algún momento será el caso» y «en algún momento ha sido el caso». Esta lógica se utiliza para poder simbolizar de modo más adecuado enunciados sobre el pasado o sobre el futuro. Mediante la lógica temporal podríamos estudiar la posibilidad de que el tiempo pueda ramificarse no solo hacia la izquierda, es decir, hacia el pasado, haciendo posible el viajar a diversas épocas históricamente superadas, sino también sería posible plantear qué sería necesario a nivel lógico para que el tiempo pueda ramificarse hacia el futuro, haciendo posible diferentes versiones de nuestro presente en tiempos posteriores al actual (Mora, 2022¹⁰⁷).

5. Conclusiones

Este trabajo se interesa por la lógica formal, la misma que analiza la validez de la inferencia, pero considerando reglas y principios

¹⁰⁷ Se recomienda revisar el capítulo 8 de este libro (Mora, 2022, pp. 149-173), pues se explica detalladamente la lógica temporal. Además, en Gardies (1979) se afirma que $(Fp \wedge Fq) \rightarrow [F(p \wedge q) \vee F(p \wedge Fq) \vee F(Fp \wedge q)]$ es un axioma que impide la ramificación hacia la derecha (hacia el futuro) y $(Pp \wedge Pq) \rightarrow [P(p \wedge q) \vee P(p \wedge Pq) \vee P(Pp \wedge q)]$ es otro axioma que impide la ramificación hacia la izquierda (hacia el pasado). Siendo así, los viajes en el tiempo supondrían evitar tanto el primer como el segundo axioma.

fundamentados en las estructuras abstractas de las expresiones. La lógica formal se divide en lógica clásica y lógicas no clásicas. Estas últimas, las lógicas no clásicas son las que consideramos centrales en este escrito. Ahora bien, las paradojas son consideradas como argumentos que parten de premisas aceptables y que aplicando reglas aceptables deducen una conclusión inaceptable. Existen muchas paradojas y, además, muchos modos de clasificarlos. De todas las clasificaciones, resalta la de Ramsey que las divide en paradojas semánticas y paradojas lógicas. Es notorio que las paradojas más relevantes resultan siendo la del mentiroso y la de Russell.

La importancia del estudio de las paradojas radica en que motiva el pensamiento crítico y, además, puede servir como herramientas de enseñanza para propiciar el aprendizaje de las lógicas no clásicas. Así, por ejemplo, la paradoja del mentiroso entendida como engendradora de expresiones ni verdaderas ni falsas sería motivo para introducir a los interesados a la lógica paracompleta. También, la paradoja de Cantor en tanto aplica nociones básicas de lógica clásica a conjuntos infinitos podría servir como incentivo para aprender algo de lógica intuicionista. Asimismo, las paradojas de Russell en tanto desembocan en contradicciones del tipo $P \wedge \sim P$ podrían ser usadas para exigir el aprendizaje de la lógica paraconsistente.

El mismo tipo de consideraciones se ha utilizado para tratar sobre las paradojas de la implicación material, de la implicación estricta y la lógica relevante, la paradoja *sorites* y la lógica difusa, la paradoja de Ross, la paradoja del buen samaritano y la lógica deóntica, las paradojas de la física cuántica y la lógica cuántica y la paradoja de los viajes en el tiempo

y la lógica temporal. Mediante el conocimiento de la relación entre *paradoja* y *lógica no clásica* el estudiante puede comprender mejor lo que significa investigar dentro del campo de la lógica.

CUESTIONARIO # 7

1. ¿Qué objetivo tiene el uso de paradojas en la enseñanza de lógicas no clásicas?

- a) Simplificar conceptos relacionados con el infinito.
- b) Introducir nociones ajenas a la lógica clásica.
- c) Evitar problemas de autorreferencia.

2. ¿Qué lógica es particularmente útil para analizar paradojas como la del mentiroso?

- a) Lógica paracompleta
- b) Lógica modal
- c) Lógica difusa

3. ¿Qué elemento de las paradojas motiva el estudio de lógicas no clásicas?

- a) La autorreferencia
- b) Las contradicciones inaceptables
- c) Los problemas semánticos

4. ¿Qué pregunta clave aborda este capítulo?

- a) ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para comprender paradojas?
- b) ¿Cómo se pueden evitar algunas paradojas en lógica clásica?
- c) ¿Qué métodos educativos son menos efectivos para enseñar lógica modal?

5. ¿Qué características tienen las paradojas que las hacen valiosas en educación?

- a) Son problemáticas y desafiantes.
- b) Son fáciles de resolver con lógica clásica.
- c) Son solo inútiles enredos de palabras.

6. ¿Qué tipo de lógica se podría utilizar para analizar problemas como la paradoja de Russell?

- a) Lógica formal.
- b) Lógica paraconsistente.
- c) Lógica cuantificacional.

7. ¿Qué habilidad desarrolla el estudiante al analizar paradojas?

- a) Pensamiento crítico.
- b) Resolución de problemas legales.
- c) Conocimiento técnico de matemáticas.

8. ¿Qué paradoja sirve para introducir al estudio de la lógica intuicionista?

- a) Paradoja de Cantor.
- b) Paradoja del mentiroso.
- c) Paradoja del Aquiles y la tortuga.

9. ¿Cuál es el problema con la paradoja del buen samaritano?

- a) Afirma que los delitos son obligatorios.
- b) Afirma que los delitos están prohibidos.
- c) Afirma que los actos son plenamente libres.

10. ¿Qué lógica se puede relacionar con la paradoja del abuelo?

- a) Lógica temporal.
- b) Lógica doxástica.
- c) Lógica clásica.

Solucionario: 1b, 2a, 3b, 4a, 5a, 6b, 7a, 8a, 9a, 10a.



CAPÍTULO 8

EL SIGNIFICADO PARADÓJICO DE: “SI TODO ES X, NADA ES X”

Resumen: En este capítulo se analiza la frase “si todo es x entonces nada es x”. Para ello, usaremos la lógica no jerárquica. Dentro del marco teórico de esta lógica inspeccionaremos esa frase, primero, dentro del lenguaje natural. Evaluaremos diversos ejemplos que señalan que se trata de una frase irónica. El análisis revela que este tipo de frases se usa como una especie de refutación para enfrentar a los que defienden tesis que contienen generalidades y un predicado valorativo. Luego, analizaremos lógicamente esta oración, es decir, dentro de la lógica formal, específicamente, la lógica cuantificacional de primer grado y usando procedimientos técnicos (como el método FH) para saber si es válida y si no, en qué condiciones podría ser válida. El estudio de esta situación nos obligará a profundizar en la lógica difusa.

1. Estudios de lógica no jerárquica¹⁰⁸

El objetivo principal de la lógica no jerárquica es aceptar que un tema formal puede estudiarse dentro un campo no formal (y viceversa). Este hecho es un signo de la necesidad de renunciar a las jerarquías en la lógica. Esto precisamente ya ha sido realizado en el caso de la paradoja de Curry. Además, el enfoque de la lógica no jerárquica busca difundir la convicción de que la división de la lógica en formal y no formal carece de base. Esta división es una convención cómoda para comprender los tipos de asuntos en estudio. Pero esta dicotomía se convierte en una dificultad cuando limita la creatividad del investigador. No hay pecado ni vergüenza en resolver un asunto formal por medio de métodos no formales (y viceversa). La única condición es que un investigador, en medio del caos, pueda dar orden a sus ideas y tener creatividad.

La lógica no jerárquica es la lógica que no establece superioridades entre ninguna lógica. Desde el marco teórico de la lógica no jerárquica, la lógica no formal (en tanto vinculada a la cultura humanística) puede aportar herramientas e interpretaciones que luego podrían ser usadas por la lógica formal (en tanto vinculada a la cultura científica). La lógica formal y no formal se pueden utilizar al mismo tiempo en el análisis. Pero para que el investigador no cometa excesos o errores, debe tener una base académica suficiente. Es decir, el análisis del lenguaje debe guiarse por cuestiones pragmáticas y por factores que el lenguaje natural instaure.

¹⁰⁸ A esta lógica no jerárquica se le denominará después “lógica transdisciplinaria”.

Este trabajo muestra que es posible encontrar un equilibrio entre ambos tipos de lógica.

2. Paradojas en sentido coloquial

La frase que vamos a estudiar podría ser entendida como una expresión paradójica. Una paradoja en sentido coloquial es una expresión asombrosa, absurda, contradictoria o sorpresiva que se opone a lo comúnmente aceptado. Por ejemplo, “Soy ateo gracias a Dios” o “No hay mal que por bien no venga”. Parece chocante contra el buen sentido que alguien manifieste su ateísmo y al mismo tiempo un cierto vínculo con Dios. Igualmente, un mal deja de ser tal si aparece como un cierto bien. Lo mismo podemos decir de la frase “Si todo es así, entonces nada es así”. Por ejemplo, si todos son privilegiados entonces nadie lo es. La idea es que si todos van a ser tratados con preferencias entonces dejará de existir “el ser privilegiado” porque no existiría su opuesto, a saber, “el desfavorecido”. Si todos son privilegiados, esa sería la nueva normalidad y, en ese sentido, todos serían tratados por igual y no habría nadie que esté por encima del trato habitual.

La frase condicional a primera vista parece un sinsentido. Sin embargo, luego de ser explicada puede ser comprendida. Precisamente, lo mismo ocurre con las paradojas antes mencionadas. La frase en la que un ateo agradece a Dios por su ateísmo en realidad significa otra cosa. El ateo está diciendo que afortunadamente es ateo. Solo ha cambiado unas palabras por otras. Y en el caso del mal que aparece para ayudarnos ocurre lo mismo. A veces una noticia negativa como el rechazo de una posible oportunidad laboral puede significar más tiempo para estudiar y,

tal vez, para ganar un concurso que nos permita viajar por el mundo. Nunca se sabe. En lo que sigue, investigaremos diferentes usos de la estructura condicional mencionada.

3. Uso de lógica no formal y lenguaje natural

Comenzaremos este apartado analizando semánticamente la frase “Si todo es x, nada es x”. Estudiaremos varias aplicaciones de la frase antes mencionada dentro del lenguaje natural. Esta frase se utiliza en diferentes casos para indicar la necesidad de aclarar los conceptos. Evaluaremos 6 casos para explicar el significado de dicha frase¹⁰⁹.

a) Si todo es *bullying*, nada es *bullying*

Esta oración es el título de un libro (Canals, 2016). La frase indica que es necesario distinguir entre el acoso y las agresiones propias de la violencia escolar. En ese sentido, si todo se va a clasificar como *bullying*, se hace difícil identificar un caso concreto de *bullying*.

Podríamos afirmar que el acoso escolar se refiere a un tipo de comportamiento violento e intimidatorio que se ejerce verbal, física o psicológicamente entre niños y adolescentes durante la etapa escolar. Pero, esta definición es muy amplia. Para que esta definición sea clara, se necesita contexto, más detalles y casos previamente identificados. Así, si se detecta un caso de *bullying* en una escuela, este debe involucrar

¹⁰⁹ En Aristóteles (1998) se ha podido ubicar una frase muy parecida la cual dice que el que tiene muchos amigos, en realidad, no tiene ninguno. Es decir, si todos son nuestros amigos, nadie lo es. El significado de esto es que no se puede ser amigo de todos. La amistad exige selección y profundización. Y eso solo se puede hacer con pocas personas.

conductas trasgresoras, amenazas, ataques y seguimiento por parte del acosador.

b) Si todo es urgente, nada es urgente

Los jefes suelen ser muy exigentes. Dicen que todas las obligaciones que deben cumplir sus empleados son urgentes o importantes. Incluso suelen exigir que quieren hechas las cosas “para ayer”. Pero esto es problemático. Esta frase indica que si se deben priorizar las actividades es importante distinguir entre lo urgente y lo que puede esperar.

Una forma de resolver estos problemas es definiendo el término “importante”. Lo importante es lo relevante por su valor, magnitud, influencia u otras características. Para comprender la distinción relevante-irrelevante se puede revisar los plazos para cada tarea. Si hay algo que debemos entregar el jueves entonces es mejor que nos concentremos en eso y que dejemos de lado lo que nos toca entregar el sábado o el domingo. Esto es, primero, se deben cumplir los asuntos más inmediatos y urgentes, luego, los que pueden esperar. Es prioritario resolver los temas que involucran vidas, hospitales y enfermedades, por ejemplo. La consideración de esas variables podría guiar la resolución de este problema.

c) Si todo es arte, nada es arte

La frase revela una verdad del arte contemporáneo (Garduño, 28 de abril de 2014). Últimamente, se considera arte a cualquier instalación que se exhiba en un museo como pegar un plátano con un parche en la

pared. Pero, si es así, ¿cómo entender la importancia real de las grandes obras de arte en la historia? El arte es la actividad en la que el hombre recrea, con un propósito estético, un aspecto de la realidad o un sentimiento en formas hermosas utilizando materia, imagen o sonido.

El problema con la definición anterior es que es discutible. Sin embargo, si no se quiere caer en el peligroso abismo de llamar *arte* a cualquier cosa, debemos ser exigentes. Por ejemplo, Antonio García (2019) propone utilizar el concepto de *hamparte* para señalar las obras simplistas y mínimas que hoy se exhiben en los grandes museos.

1. Objetos fabricados en serie que cualquiera puede encontrar en una tienda y que se presentan como obra de arte.
2. Poner un objeto cualquiera en un espacio expositivo para llamarlo obra de arte.
3. Si la obra no requiere mayor talento para realizarla, está llena de lugares comunes.
4. Si su único valor está sustentando por un texto teórico, filosófico y político que no se refleja en la obra.
5. La atribución de valor inexistente a objetos que se comercializan con precios exorbitantes.
6. Un artista debe demostrar siempre que es artista, nunca se gana el derecho de serlo. De lo contrario, es *hamparte* (15 minutos, 18 de setiembre del 2018, párr. 5).

Estas ideas ayudan a distinguir entre una auténtica obra de arte y otra que se quiere hacer pasar por tal sin que sea realmente arte de peso.

d) Si todo es fascismo, nada es fascismo

La frase alerta sobre el uso desmedido de la palabra “fascista” (López, 12 de diciembre de 2020). En los debates políticos españoles, el ataque al oponente se ha reducido a llamarlo fascista. Esto crea el problema de reconocer o identificar a un fascista real.

Algunos entienden que el fascismo es cualquier doctrina de naturaleza totalitaria y nacionalista. Si es así, podemos estigmatizar cualquier propuesta política que quiera intervenir en la vida privada y económica de las personas denominándola fascista. Pero, si decimos que cualquiera que defienda estas ideas es fascista, caemos en la *falacia del espantapájaros* y eso es conveniente para persuadir, aunque el público estará más asustado y confundido que convencido.

La idea de la frase, sin embargo, tiene que ver con evitar los extremos en los que la política se está ubicando últimamente. Ya se está volviendo común que los políticos solo se agredan en cualquier debate importante. Por ende, el uso del término “fascista” debería estar más acotado.

e) Si todo es joya, nada es joya

Esta frase sostiene que, si todo debe ser considerado una joya, entonces nada tendrá la majestuosidad de una verdadera joya (Alfaya, 28 de enero de 2021). Para identificar una joya, se debe recurrir a varios criterios.

Aunque la palabra “joya” se puede aplicar metafóricamente a casi cualquier cosa que nos parezca un tesoro, debemos ser exigentes. Reconocer qué es exactamente una joya permitirá detectar posibles

fraudes. Una joya es un objeto de adorno o uso, hecho de algún metal noble y, a veces, decorado con perlas o piedras preciosas. Hay objetos que pueden cumplir estas condiciones, pero también es necesario que los elementos que componen la joya sean de buena calidad. Eso es esencial para detectar una joya real frente a lo que solo es bisutería.

f) Si todo es válido, nada es válido¹¹⁰.

Esta frase está relacionada con la lógica (Bustamante, 2008). Si sucede que todo puede probarse como válido, entonces eso crea un problema. Ese problema se llama “trivialidad deductiva” (Tomás y Carnielli, 2005) y ocurría en la paradoja de Curry ya analizada anteriormente.

En un sistema lógico confiable, no podemos permitir contradicciones porque eso significa que todo se puede probar. Esto es inadecuado porque la lógica clásica que usemos para la deducción debe permitirnos distinguir entre argumentos correctos y argumentos incorrectos. Si cualquier inferencia es válida, la lógica será inútil. La lógica estudia la validez de los argumentos considerando su forma y ciertas reglas y principios que explican la relación de consecuencia lógica.

¹¹⁰ Algo semejante ocurre en las frases: “Si todo es verdad, ya nada lo es” o “Dado que todos tenemos razón entonces ninguno la tiene”. Ambas reflejan una paradoja relacionada con la relatividad de la verdad o la incoherencia de una verdad absoluta. En ambas expresiones se sugiere que, si se acepta que todas las perspectivas o afirmaciones son igualmente válidas o verdaderas, entonces la noción de “verdad” pierde su significado porque ya no hay un criterio que distinga lo verdadero de lo falso. Es una crítica a la idea de que todas las opiniones son igualmente correctas, ya que esto puede llevar a una situación en la que no se puede determinar qué es verdaderamente cierto. Concretamente, estas frases podrían significar que ya no tenemos datos confiables porque en la internet abunda tanta información falsa que es repetida, aceptada y compartida incluso más que la misma información verdadera. En pocas palabras, la calidad de la información disponible públicamente es muy baja y el escrutinio del público es poco exigente.

Para establecer la validez de un argumento es necesario recurrir a criterios. Si todo es válido, entonces ningún argumento es realmente confiable.

4. Resultado del análisis no formal

Se puede deducir que la frase estructural en análisis (Si todo es x, nada es x) es un tópico. En la argumentación, estos tópicos se suelen utilizar como ideas de fuerza que resumen una posición. Ejemplos de tópicos en derecho: “Todo acusado será declarado inocente hasta que se demuestre lo contrario”, “Nadie debe ser juez y parte”, “El que calla, cuando debió haber hablado y pudo hacerlo, se le considera como alguien que está de acuerdo con lo que se ha manifestado” (de modo más sencillo, “el que calla, otorga”).

Los tópicos son frases construidas por la tradición y encajan en una conversación o debate. Como su significado ya es conocido por los participantes, dicha frase solo se menciona y así se muestra una posición asumida. Por ejemplo, si alguien recibe un regalo que no le gusta se le podría decir que igual debería agradecer el esfuerzo porque “a caballo regalado no se le mira el diente”. Con esa frase se resume una cierta postura o, en este caso, se cierra la idea principal de un consejo.

Es importante señalar que la frase es convincente cuando el término que aparece está relacionado con valores. Por ejemplo, este caso no es convincente: “Si todo el mundo es médico, nadie es médico”. Esa palabra descriptiva (“médico”) no implica problemas. El problema surge cuando el término central es uno que involucra adjetivos o valores calificativos cuestionables. Estos términos se caracterizan por tener

cierto grado de vaguedad. En la parte final de este trabajo recurriremos a la lógica difusa para analizar esta frase con más detalle.

5. Uso de lógica formal y lenguaje técnico

Como siguiente paso, analizaremos lógicamente esta oración utilizando la lógica clásica. La oración anterior se puede simbolizar de la siguiente manera

$$1. (\forall x) Bx \rightarrow (\forall x) \sim Bx$$

Si aplicamos la prueba condicional, llegaremos a demostrar lo siguiente

$$2. (\forall x) Bx \quad \text{Premisa Adicional}$$

$$3. Bx \quad \text{Ejemplificación Universal (2)}$$

$$4. (\exists x) Bx \quad \text{Generalización Existencial (3)}$$

$$5. \sim (\forall x) \sim Bx \quad \text{Intercambio de Cuantificadores (4)}$$

$$6. (\forall x) Bx \rightarrow \sim (\forall x) \sim Bx \quad \text{Prueba condicional}$$

Con base en lo anterior podemos afirmar que solo podemos probar que, si todo es x, entonces algo es x. De manera equivalente, solo podemos probar que, si todo es x, entonces no es cierto que nada sea x. Debemos notar que lo que legítimamente se deduce lógicamente es totalmente contradictorio con lo que aparece en el consecuente del condicional analizado originalmente en este capítulo.

Esto muestra claramente que la sentencia analizada deriva en algo contradictorio. Lo que se sigue de “todo es x” es que “no es cierto que nada es x”, pero la oración condicional tiene como consecuente que “nada es x”. Es decir, la oración afirma que, si se cumple el antecedente, entonces se dará un consecuente que es lógicamente incoherente con lo que realmente se puede deducir. No indica que todo o nada sea de cierta

manera. Lo que esta oración está afirmando es que, si se acepta el antecedente controvertido, habrá que aceptar también el consecuente controvertido. Lo que dice esta frase es que del absurdo también se pueden deducir cosas absurdas. Por este motivo, esta frase podría estar asociada a las paradojas pues usando un antecedente determinado puede lógicamente derivar en algo como p y, sin embargo, la frase original invita a deducir su negación, a saber, $\sim p$.

Para demostrar la invalidez de la fórmula 1 aplicaremos el método Ferro-Herbrand (método FH) para fórmulas monádicas de primer grado¹¹¹. Así obtenemos lo siguiente:

$$1. (\forall x) Bx \rightarrow (\forall x) \sim Bx$$

Aplicamos a 1 la definición del condicional

$$2. \sim (\forall x) Bx \vee (\forall x) \sim Bx$$

Transformemos 2 en su forma normal.

$$3. (\exists x) \sim Bx \vee (\forall x) \sim Bx$$

A continuación, eliminamos los cuantificadores y reemplazamos las variables.

$$4. \sim Ba \vee \sim Ba$$

¹¹¹ El siguiente método tiene 6 reglas (Ferro, 1995, pp. 16-26) donde S es la fórmula en análisis:

1. Reducir la fórmula S a otra llamada S' y que resulta de unir mediante conjunciones, disyunciones y negaciones fórmulas cuantificadas existencial o universalmente, así como proposiciones simples.
2. Quitar los cuantificadores universales y sustituir las variables individuales por constantes (como si se tratara de una especie de ejemplificación universal).
3. Quitar los cuantificadores existenciales y sustituir las resultantes fórmulas abiertas $F(x)$ por la disyunción de tantos miembros como cuantificadores universales existan.
4. Dejar intactas a las variables proposicionales ($p, q, r, s, t, u, v, w, \dots$).
5. Mediante algún sistema de decisión para el cálculo proposicional, determinar si estamos a una fórmula tautológica o no.
6. S será válida si y solo resulta tautológica de acuerdo con el paso anterior.

Finalmente, apliquemos la idempotencia.

5. $\sim$ Ba

Dado que la fórmula obtenida no es tautológica, la fórmula 1 es inválida, según el método FH.

Ahora bien, la fórmula 1 solo sería válida si se dificulta la aplicación clara e indiscutible de un predicado valorativo. Es decir, debería ser difícil distinguir entre cosas que son P y cosas que no son P para que tal fórmula sea válida. Sin embargo, esto se puede resolver recurriendo a unos pocos criterios. Por ejemplo, podemos apelar a criterios para medir el grado de intensidad de tal o cual predicado. Analicemos este caso específico. “Si todo el mundo es rico, nadie es rico”. Esta oración nos advierte sobre la definición de la palabra “rico”. Solo podemos hablar de “rico” en comparación con algo que no es rico, es decir, algo pobre. Además, podríamos recurrir a hablar de grados de riqueza, es decir, podemos decir que este individuo es rico, este otro es más rico y este último es demasiado rico. Es decir, esa inferencia sirve para señalar que hay una contradicción causada por la aplicación de ese predicado a una generalidad dada previamente. En otras palabras, urge delimitar el significado del término “rico”.

Para entender lo que sucede en esta oración podemos recurrir a la lógica difusa. La lógica difusa, también llamada lógica de enunciados vagos, está estrechamente relacionada con el fenómeno de la vaguedad, es decir, el significado difuso de las unidades lingüísticas. La frase señala que “si todo es x entonces nada es x”. Esto puede interpretarse como un reclamo acerca de la aplicación del predicado x, el cual podría ser un predicado difuso.

La frase en análisis muestra exceso y defecto a la vez en los conceptos difusos. Hay exceso porque alcanza a señalar a todos los casos que se usan en el razonamiento aludido. Pero, hay defecto porque no permite señalar de modo estricto qué caso es definitivamente del tipo que se indica (por ejemplo, ¿es rico alguien que gana 2000 dólares o alguien rico debería ganar al menos un millón de dólares? ¿podemos decir que alguien que gana 500 dólares es rico en comparación con quien está desempleado?). Pensemos en la palabra “niño”. Podemos reconocer a todos los niños que nos pongan al frente, pero si nos preguntan cuando este individuo específico deja de ser niño y se convierte en adulto (o no-niño) no tenemos muy claro el asunto.

Un concepto es vago cuando incluye casos límite, es decir, casos de los cuales no se puede decir claramente si son o no instancias del concepto en estudio. Ejemplos: ¿Qué tan rápido debe correr alguien para ser considerado “veloz”? ¿Cuál es la altura máxima de un hombre de baja estatura? ¿Cuántos libros debe leer una persona al año para ser considerada “cultivada”? ¿Exactamente cuánto dinero necesita un hombre para que lo llamemos “rico”? ¿Cuánta azúcar debe tener un postre para ser considerado “demasiado dulce”? ¿Cuántos años específicamente debe tener una persona para ser considerada adulta? Usar esta lógica podría ser muy beneficioso para comprender lo que está sucediendo en esta oración.

De hecho, ¿de qué manera podríamos volver verdadera la condicional que estamos analizando? La única forma que por ahora podemos imaginar es asumiendo que tanto el antecedente como el consecuente son falsos. Si esto ocurre, entonces tendríamos $F \rightarrow F$ y esa

condicional es verdadera. El problema está en ver la forma de fundamentar la idea de que $(\forall x) Bx$ equivale a $(\forall x) \sim Bx$ y de que ambos son falsos. Esto parece algo complicado en lógica clásica, aunque sería lo más fiel al significado original e intuitivo de esta situación.

Se nos ocurre pensar en un caso específico. Si en una fiesta algunos son provincianos, entonces afirmar que todos son provincianos sería afirmar algo falso e igualmente afirmar que nadie es provinciano sería afirmar algo también falso. Sostener en ese contexto que, si todos son provincianos, nadie lo es sería afirmar algo verdadero y con este artificio se habría logrado volver verdadera al condicional en estudio. Sin embargo, exploraremos la lógica difusa para intentar ver más detalles de esta frase.

6. Aplicación de la lógica difusa

Lofti Zadeh (1965) propuso la lógica difusa para examinar los argumentos que contienen predicados vagos. La lógica difusa permite trabajar con conceptos imprecisos o graduales, como “alto”, “rico” o “rápido”. A diferencia de la lógica clásica, que solo admite valores de verdadero (1) o falso (0), la lógica difusa asigna grados de verdad entre 0 y 1, reflejando mejor la naturaleza ambigua de muchos predicados. Por ejemplo, una persona de 1.75 m puede ser considerada “0.7 alta” en lugar de simplemente “alta” o “no alta”. Esto se logra mediante la asignación de grados de pertenencia a una categoría, facilitando el razonamiento sobre términos vagos. La lógica difusa es especialmente útil en aplicaciones como sistemas de control automático, inteligencia artificial

y toma de decisiones, ya que permite manejar de manera flexible situaciones que no tienen límites claros o definidos.

La idea es que la dicotomía verdadero-falso es como la dicotomía blanco-negro pues, así como hay muchos tipos de grises entre el blanco y el negro, igualmente hay muchos grados de verdad entre lo verdadero y lo falso. Para entender la lógica difusa pongamos un ejemplo sencillo. La oración “Pedro es un niño” debería tener un valor de verdad. Pero, la idea de ser un niño parece degradarse a medida que Pedro va creciendo. En ese sentido, puede decirse que “niño” es un predicado vago. De igual forma, el valor de verdad de la oración mencionada también admitirá grados. Esta variación puede ir desde 0 (la total falsedad) hasta el 1 (la total verdad).

Nos ayudará considerar el concepto de negación en lógica difusa. A medida que Pedro crece en edad podemos decir que la oración va decreciendo respecto a su valor de verdad. De hecho, en esta lógica el valor de $\sim p$ sería 1 menos el valor de p . Para nuestro caso, consideraremos que $(\forall x) Bx$ y $(\forall x) \sim Bx$ manifiestan ideas opuestas o al menos complementarias, pues es razonable pensar que el complemento de la nada es el todo y viceversa¹¹². Así pues, a medida que el todo va disminuyendo, la nada estará aumentando y a medida que la nada disminuye, el todo irá aumentando. Lo mismo ocurre con los conceptos de niño y adulto.

¹¹² Estamos conscientes de que $(\forall x) Bx$ y $(\forall x) \sim Bx$ no son contradictorios entre sí porque la negación de “todo es x” es “algo no es x”. Sin embargo, asumiremos que ambas fórmulas expresan ideas complementarias (es decir, que mutuamente se completan) para saber hasta dónde nos llevará esto. Un ejemplo de ideas complementarias son las vocales y las consonantes. Juntas constituyen el concepto de abecedario.

En relación al condicional, el asunto es más complicado. Un condicional cuyo antecedente es igual o menos verdadero que el consecuente, es un condicional totalmente verdadero. Pero, si el antecedente se aproxima a la verdad más que el consecuente se aplica la siguiente regla: el valor de $p \rightarrow q$ es 1 menos la diferencia entre el valor de p y el valor de q . Veamos este cuadro de resumen:

Tabla 2

Tablas de verdad en lógica difusa

	$\neg$		$\wedge$	1	0.7	0.3	0
1	0	1	1	1	0.7	0.3	0
0.7	0.3	0.7	0.7	0.7	0.7	0.3	0
0.3	0.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0
0	1	0	0	0	0	0	0

$\vee$	1	0.7	0.3	0	$\rightarrow$	1	0.7	0.3	0
1	1	1	1	1	1	1	0.7	0.3	0
0.7	1	0.7	0.7	0.7	0.7	1	1	0.6	0.3
0.3	1	0.7	0.3	0.3	0.3	1	1	1	0.7
0	1	0.7	0.3	0	0	1	1	1	1

Fuente: Díez, 2013, p. 144

Pensemos en un caso. Tenemos 10 cosas en el mundo que queremos denominar “joyas”. Realmente, solo 3 cosas son joyas de verdad y las otras son bisutería. En ese caso, $(\forall x) Bx$ diría que “todo es joya”, pero eso solo sería verdadero al 0.3 y $(\forall x) \sim Bx$ diría que “nada es joya”, pero eso solo sería verdadero al 0.7. Analizando la tabla de verdad correspondiente a la relación condicional para este caso nos daremos cuenta que la condicional $(\forall x) Bx \rightarrow (\forall x) \sim$

Bx es verdadera, lo cual se puede interpretar como que tiene sentido nuestro rechazo de que todas esas cosas sean joyas auténticas pues muy pocas cosas son, en realidad, joyas. Ahora bien, imaginemos que de las 10 cosas 7 son de verdad joyas y las 3 cosas restantes son bisutería, es decir, invertimos los valores. En relación a la tabla de verdad la condicional $(\forall x) Bx \rightarrow (\forall x) \sim Bx$ ahora tendría el valor de verdad de 0.6. Esto se puede interpretar como afirmando que nuestro rechazo de que todas sean joyas auténticas es aceptable pero solo al 0.6 (más de la mitad), es decir, es aceptable pero no tan aceptable porque la mayoría de esas cosas sí son joyas auténticas.

7. Conclusión

Partimos del marco de la lógica no jerárquica. Este marco es importante porque nos permite utilizar herramientas de la lógica formal y la lógica no formal. Luego, analizamos seis casos de uso de la frase: “Si todo es x, nada es x”. En el lenguaje natural, esta frase tiene sentido porque involucra términos confusos. En cambio, si dijéramos “Si todo el mundo es médico, nadie es médico”, esto no tendría sentido. Esta frase solo tiene sentido cuando involucra términos difusos como *bullying*, urgencia, arte, fascismo, joya y válido. Finalmente, analizamos esta frase dentro de la lógica de primer orden. De acuerdo con criterios formales, la forma lógica de esta frase es inválida porque es imposible concluir el consecuente “nada es x” del antecedente “todo es x”. El único consecuente que tiene sentido es “No es cierto que nada es x”. Recomendamos analizar esta frase con la ayuda de la lógica difusa y realizamos un pequeño ensayo al respecto.

CUESTIONARIO # 8

1. ¿Qué lógica se usa para analizar la frase "Si todo es X, nada es X"?

- a) Lógica difusa.
- b) Lógica modal.
- c) Lógica paraconsistente.

2. ¿Qué conclusión se deriva del análisis no formal realizada la frase en cuestión?

- a) Es necesario colocarles límites claros a los conceptos.
- b) Las paradojas son lo mismo que las falacias.
- c) Las paradojas carecen de relevancia.

3. ¿Qué se deduce lógicamente de “todo es X”?

- a) Nada es x.
- b) No es cierto que nada es x
- c) Algo no es x

4. ¿Qué tipo de lógica se propone como alternativa para realizar análisis formales y no formales?

- a) Lógica no jerárquica.
- b) Lógica paracompleta.
- c) Lógica deóntica.

5. “Si todo es X, nada es X” es una expresión lógicamente

- a) válida.
- b) inválida.
- c) verdadera.

6. ¿Qué término puede considerarse vago?

- a) amarillo
- b) profesional
- c) abogado

7. La problemática frase “Si todo es X, nada es X” constituye una

- a) paradoja en sentido técnico.
- b) paradoja en sentido coloquial.
- c) falacia.

8. En lógica difusa, si el valor de p es 0.7, el valor de $\sim p$ sería

- a) 1
- b) 0.3
- c) 0

9. En lógica difusa, si el valor de p es 0.7 y el valor de q es 0.3, entonces ¿cuál es el valor de $p \rightarrow q$?

- a) 0.6.
- b) 0.7.
- c) 0.3.

10. ¿Por qué la frase “Si todo es agua, nada es agua” no resulta problemática?

- a) Porque dicho condicional es paradójico.
- b) Porque “agua” es un término descriptivo.
- c) Porque la frase solo es problemática cuando incluye una x.

Solucionario: 1a, 2a, 3b, 4a, 5b, 6a, 7b, 8b, 9a, 10b.



CAPÍTULO 9

SOBRE LA LÓGICA CUÁNTICA

Resumen: Esta investigación busca explicar el significado de la lógica cuántica. Inicio considerando las razones que justifican la razón de ser de las lógicas cuánticas. Luego, prosigo exponiendo la lógica cuántica de Birkhoff y von Neumann con rigor formal y claridad conceptual. Finalmente, terminamos hablando sobre las interpretaciones que ha tenido la lógica cuántica, en especial, por parte de Putnam. Básicamente, concluimos que la lógica cuántica no constituye una nueva lógica que pueda reemplazar a la lógica clásica como lógica del mundo.

1. ¿Lógicas cuánticas?

En tanto teoría, la lógica formal estudia los argumentos desde el punto de vista de su validez y esta depende de su forma, forma que está dada solo por los significados de los “términos lógicos” (como “ $\wedge$ ” o “ $\rightarrow$ ”) y no por el de “términos descriptivos” (como “peruano” o “vegetariano”). De acuerdo a Priest (2006, p. 15), la lógica estudia los argumentos, pero no en tanto procesos mentales sino en tanto productos de tales procesos. Entendido de esta manera, un argumento es un conjunto de oraciones formulado por alguien que pretende que la “conclusión” se sigue (se deriva, se desprende) de las “premisas”. La pretensión de que las premisas dan apoyo o fundamento a la conclusión es lo que distingue a los argumentos de otros conjuntos de oraciones como las descripciones y los relatos. Para entender esto, veamos dos inferencias:

1. *París es la capital de Francia, y este tren llega a París; entonces, el tren llega a Francia.*

2. *Sídney es la capital de Canadá, entonces, si estoy en Sídney, estoy en Canadá.*

La primera no reporta problema. Pero la segunda no persuade a nadie. Si la premisa hubiera sido cierta, la conclusión hubiera sido correcta y la deducción resultaría válida. La conclusión hubiera resultado de las premisas y en eso se interesa la lógica. No le interesa si las premisas de un argumento son verdaderas o falsas. Ese es asunto de alguien más. La lógica presupone la verdad de las premisas como hipótesis. Le interesa simplemente si la conclusión resulta de las premisas. Los lógicos llaman válido a un argumento cuando la conclusión en verdad resulta de las premisas. Por ende, la meta central de la lógica es comprender la validez.

Ahora bien, en tanto aplicación,

(...) la lógica práctica (resultante de la aplicación de la lógica formal a las teorías físicas) pretende dictar las reglas básicas que rigen las relaciones vinculantes que presentan entre sí nuestras proposiciones sobre el mundo real. Pero, ¿podría una revisión de esta lógica ayudarnos a comprender el sentido de los fenómenos cuánticos? Nosotros solemos considerar a la lógica como si de algo inmutable e independiente de nuestro conocimiento experimental del mundo se tratase. Sin embargo, eso mismo pensábamos de la geometría hace dos siglos. Y sucedió que la geometría del mundo podía cambiar, si variábamos las relaciones que se establecen entre los objetos estudiados por ella. Quizá, la lógica sea una cuestión empírica en la misma medida que ahora consideramos que la química y la geometría lo son. (Sklar, 1994, p. 285)

La lógica cuántica se podría definir como el conjunto de reglas algebraicas (formales y estructurales) que rigen las operaciones para combinar los elementos del vocabulario lógico vinculándolos a acontecimientos físicos que se observan a escalas atómicas en el micromundo cuántico. Según Maldonado (2007, p. 167):

El trabajo de la lógica cuántica consiste en el desarrollo de un lenguaje que permita traducir al lenguaje de los fenómenos y comportamientos macroscópicos las especificidades del mundo cuántico que tienen un lenguaje radicalmente diferente del que usamos en la escala macro. Por ende, el objetivo de la lógica cuántica es el de estudiar si la semántica cuántica se corresponde

o no con la semántica proposicional clásica. Y si no se corresponde, entonces trabaja en la construcción de un puente.

En pocas palabras, como lo afirma Piscoya, el debate sobre la verdadera comprensión de la mecánica cuántica se debe a un intento forzado de utilizar un lenguaje clásico para describir procesos que deben ser vistos a una luz totalmente nueva, con un nuevo aparato conceptual. Este debe ser, entiende el autor de este trabajo, la lógica cuántica.

Existen distintos intentos de modificar la lógica clásica para resolver algunas dificultades de la mecánica cuántica que resultaron en las denominadas “lógicas cuánticas”. Varios de estos intentos consisten en poder asignar a cualquier proposición otras posibilidades además de verdadera (V) o falsa (F). Hans Reichenbach pensó que dando cabida a proposiciones que no fueran ni ciertas ni falsas, algunas de las características de los sistemas cuánticos podrían representarse adecuadamente.

Una afirmación sobre la proposición de una partícula era verdadera o falsa después de que se hubiese realizado una medición de la posición. Pero, para una partícula en un estado cuántico entre mediciones, en el que la posición tuviera un valor definido con probabilidad uno, ¿sería posible decir que las afirmaciones sobre la posición tenían un valor de verdad “indeterminado”, no siendo ni verdaderas ni falsas? (Sklar, 1994, p. 285).

Reichenbach, así, introduce el valor indeterminado (I) como alternativa adicional. Su sistema posee además tres tipos de negación en vez de uno.

Pongamos un ejemplo. Consideremos una propiedad de un sistema cuántico, por ejemplo, $X=5m$. Si el estado de sistema es tal que dicha propiedad es una propiedad objetiva poseída, entonces la proposición “el sistema tiene $X=5m$ ” es V, si la misma es una propiedad objetiva no poseída, será F y si la propiedad es una propensión¹¹³, la proposición será I.

Aparte de Reichenbach, otras propuestas de lógicas polivalentes son las siguientes. Según Fevrier, es necesario incorporar a V y F el valor absolutamente falso (A). Von Weizsäcker propone no tres, sino infinitos valores de verdad distribuidos continuamente entre V y F. Otras modificaciones propuestas a la lógica clásica (Birchhoff, Von Neumann) mantienen valores bivalentes de verdad, pero variando las leyes distributivas de la lógica clásica. Finalmente, también tenemos la modificación de Mittelstaedt a la lógica operativa de Lorenzen, que consiste en un diálogo entre un proponente y un oponente basado en reglas bien definidas. La verdad o falsedad de una proposición es determinada por el vencedor en el diálogo, el proponente o el oponente. (Clemente de la Torre, 2000, pp. 110-111)

2. La lógica cuántica de Birkhoff y von Neumann

Detengámonos en la sugerencia de Garrett Birkhoff y John von Neumann (1936). Ellos tenían la intención de discernir en la teoría cuántica las características más básicas que condujeron a los desconcertantes fenómenos cuánticos. Así, se centraron en las relaciones

¹¹³ Este término viene de “propensión” que indica cierta inclinación natural física o síquica de algo hacia algo.

entre estados de sistemas, relaciones que podrían ser consideradas como un tipo de “lógica” de proposiciones sobre el sistema. Supongamos que una partícula pasa efectivamente, es decir, con probabilidad igual a 1, a través de un filtro que sólo permite el paso de partículas spin-arriba. Entonces, podemos decir que “spin-arriba” es verdadero para la partícula. Si la partícula pasa definidamente a través de un filtro que deja pasar tanto partículas spin-arriba como partículas spin-abajo, diremos que en este caso “spin-arriba q_0 spin-abajo” es verdadero. Si una partícula pasa efectivamente a través del filtro p y a través del filtro s diremos que en este caso “ $p \text{ } q_y \text{ } s$ ” es verdadero.¹¹⁴

Tomemos en cuenta una descripción formal de la lógica cuántica. La mecánica cuántica asocia a cada sistema físico F un espacio de Hilbert¹¹⁵ H_F . La idea de una lógica cuántica explota una analogía entre la

¹¹⁴ Hay que advertir que tanto q_0 como q_y son las versiones cuánticas de la disyunción y la conjunción de la lógica clásica.

¹¹⁵ Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial provisto de un producto interno y que tiene la estructura de un espacio de Banach. Los espacios de Banach son espacios vectoriales a los que se puede extender de un modo natural el cálculo diferencial originalmente inventado para las funciones con argumentos y valores en $\mathbb{R}$. $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si se ha definido una función $\varphi : K \times V \rightarrow V$, que se combina con la operación $+$ en $\mathcal{V}$ y con la multiplicación $\otimes$ en $\mathbb{K}$ según ciertas reglas. En tal caso los elementos de V se llaman *vectores*; los elementos de K , *escalares*; operación $+$, *adición vectorial*, y la función φ , *multiplicación por escalares*. Sean, pues, a y b cualesquiera escalares; $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, cualesquiera vectores. Escribimos $a\mathbf{v}$ por $\varphi(a, \mathbf{v})$. Estas son las reglas anunciadas.

V1 $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$

V2 $(a \oplus b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

V3 $a(b\mathbf{v}) = (a \otimes b)\mathbf{v}$

V4 $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (donde 1 denota el elemento neutro de la multiplicación en $\mathbb{K}$)

Un producto interno en $\mathcal{V}$ es una función que asigna a cada par ordenado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ un escalar $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ sujeto a condiciones enunciadas a continuación.

PI1 $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle^*$;

PI2 $\langle \mathbf{v} | a\mathbf{w} + b\mathbf{u} \rangle = a \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle + b \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle$;

PI3 $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = 0$; de otro modo, $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle > 0$.

(Mosterín y Torreti, 2010, p. 212, p. 213, p. 495)

estructura del conjunto de los subespacios de un espacio de Hilbert H y el conjunto las partes del espacio de las fases¹¹⁶ E de un sistema mecánico clásico: ambos son retículos¹¹⁷ ordenados parcialmente por la relación de inclusión. Consideremos ahora el retículo de los subespacios del espacio de Hilbert H_F . Si sus elementos son designados con letras mayúsculas, tenemos que $U \sqcap B = U \cap B$, pero

$U \sqcup B = U \oplus B$, el subespacio generado por U y B ; por otra parte, para cada subespacio U , el conjunto de todos los vectores ortogonales a U , es un subespacio U' tal que

$U \sqcup U' = H_F$ y $U \cap U' = \{0 \in H_F\}$, de modo que U' es el complemento relativo de U en el retículo de los subespacios de H_F .

En la lógica cuántica, cada sistema físico tiene un espacio llamado espacio de Hilbert, que contiene todos los posibles estados del sistema. Los subespacios de este espacio representan conjuntos de estados posibles, y podemos combinarlos o compararlos con operaciones

¹¹⁶ Sean $q_1, \dots, q_n$ las coordenadas generalizadas de posición de un sistema mecánico clásico en un instante dado y $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ las respectivas componentes de velocidad en ese instante. Si L es el *lagrangiano* del sistema, se definen coordenadas generalizadas de momento $p_1, \dots, p_n$ por las ecuaciones:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

El estado mecánico del sistema en dicho instante queda entonces completamente especificado por las $2n$ coordenadas de posición y momento $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ puede representarse adecuadamente mediante un punto en una variedad diferenciable de $2n$ dimensiones. Este es el espacio de fases del sistema.

(Mosterín y Torreti, 2010, pp. 213-214)

¹¹⁷ Un retículo es un orden parcial reflexivo, en el cual cada par de elementos posee un ínfimo y un supremo. Es decir, $\langle A, \leq \rangle$ es un retículo si y solo si:

(1) $\langle A, \leq \rangle$ es un orden parcial, es decir, un orden de precedencia que ordena a los elementos que interrelaciona colocándolos unos detrás de otros.

(2) cualquier par x, y de elementos de A posee un ínfimo y un supremo, es decir, hay en A elementos u y w tales que $u = \inf(x, y)$ y $w = \sup(x, y)$. Formalmente, $\inf(x, y)$ es también simbolizado como $x \sqcap y$, y $\sup(x, y)$ es también simbolizado como $x \sqcup y$. (Mosterín y Torreti, 2010, p. 526)

especiales. Por ejemplo, la intersección de dos subespacios ($U \cap B$) son los estados comunes a ambos, mientras que su unión cuántica ($U \sqcup B$) genera un subespacio que incluye todas las combinaciones posibles de estados en U y B . Además, cada subespacio tiene un complemento ortogonal (U'), que contiene todos los estados que son completamente diferentes o "perpendiculares" a los de U .

Por ejemplo, si pensamos en un plano, el eje x y el eje y son subespacios que son ortogonales entre sí, y juntos generan todo el plano. Estas ideas son diferentes de la lógica clásica porque aquí los conceptos de unión y complemento no se basan en "sí o no", sino en relaciones geométricas como superposición y ortogonalidad, reflejando la naturaleza especial de los estados cuánticos.

Esta lógica cuántica en cuestión se constituye definiendo la biyección $g: B \mapsto b$ del retículo de los subespacios del espacio de Hilbert H_F en el conjunto de las proposiciones referentes al estado del sistema cuántico F y confiriendo a este conjunto la estructura de retículo que hace de esa biyección un isomorfismo¹¹⁸. Suponiendo que conocemos los símbolos básicos de la lógica clásica, entonces

$$g(U) \wedge g(B) = g(U \cap B) = g(U \cap B), \text{ pero}$$

$$g(U) \vee g(B) = g(U \sqcup B) = g(U \oplus B), \text{ y}$$

$$\sim g(U) = g(U'),$$

¹¹⁸ Dos sistemas (o estructuras concretas) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ con universos posiblemente distintos A y B pueden parecerse estructuralmente en ciertos aspectos, pero no en otros. En el caso extremo de que sean estructuralmente idénticos decimos que se trata de sistemas isomorfos entre sí. Son distinguibles por su "materia", por su universo, pero no por su forma: su forma es la misma, son iso-morfos. (Mosterín y Torreti, 2010, p. 325)

la proposición que dice que el sistema está en el subespacio ortogonal a U .

La lógica cuántica se construye conectando los subespacios de un espacio de Hilbert H_F (que representan estados del sistema cuántico F) con proposiciones lógicas sobre el sistema. Esta conexión se realiza mediante una función g que traduce cada subespacio U en una proposición $g(U)$, manteniendo las relaciones lógicas entre ellos. Por ejemplo, si dos subespacios se intersectan ($U \cap B$), la proposición que los representa ($g(U) \wedge g(B)$) significa que el sistema está en ambos estados a la vez. Si combinamos dos subespacios ($U \sqcup B$), la proposición resultante ($g(U) \vee g(B)$) indica que el sistema puede estar en uno u otro estado o en una combinación de ambos. Además, el complemento de un subespacio (U') corresponde a la proposición $\sim g(U)$, que dice que el sistema está en el estado ortogonal a U . Esto permite que las proposiciones cuánticas sigan una estructura lógica parecida a la clásica, pero adaptada a la naturaleza geométrica y probabilística de los estados cuánticos.

El álgebra proposicional cuántica es una estructura (reticular) cerrada bajo la operación de intersección en H , pero no es cerrada ni bajo la unión de conjuntos, ni bajo la operación de complemento relativo (que corresponde a la negación exclusiva)¹¹⁹; además, al no ser cerrada bajo la unión tampoco lo será con respecto a la disyunción exclusiva. No

¹¹⁹ Una sentencia A en un lenguaje L es una negación exclusiva de la sentencia B precisamente cuando $h(A) = H - h(B)$, donde H es el conjunto de estados posibles del sistema en cuestión y la función h es una función de satisfacción que asigna a cada sentencia elemental A en E (que es un conjunto de sentencias elementales) el conjunto $h(A)$ de estados que satisfacen A . Existe otro tipo de negación, la negación selectiva o de alcance restringido. Esta negación se caracteriza porque una sentencia A y su negación selectiva A^* pueden ser ambas no verdaderas simultáneamente.

obstante, la lógica cuántica tiene definiciones alternativas de operaciones algebraicas cerradas que pueden pensarse como las operaciones lógicas correspondientes a la negación y disyunción cuántica. Estas operaciones son la ortocomplementación y la operación de junta (el resultado del cual es el “supremo” de un par de elementos) en el retículo de los subespacios de H .

La lógica cuántica utiliza una estructura matemática especial llamada álgebra proposicional cuántica, que está cerrada bajo la operación de intersección (conjunción) pero no bajo la unión de conjuntos o el complemento clásico (negación exclusiva). Esto significa que no podemos aplicar directamente las reglas clásicas de unión o negación. Sin embargo, la lógica cuántica introduce operaciones alternativas como la ortocomplementación (que redefine la negación usando el complemento ortogonal) y la junta (que toma el "supremo", es decir, el subespacio más pequeño que contiene a dos subespacios). Estas definiciones permiten trabajar con proposiciones cuánticas de manera consistente, adaptándolas a las propiedades geométricas y probabilísticas del espacio de Hilbert.

Así, el conjunto de los subespacios de un espacio de Hilbert, H , con las operaciones de intersección de conjuntos, $\cap$, y la operación de suma lineal, $\oplus$, forma un retículo cuántico, esto es, un retículo que puede interpretarse como una lógica cuántica. Nótese que en este retículo $\langle H, \cap, \oplus \rangle$ podemos definir siempre un orden parcial como sigue: $A \leq B$, si $A \oplus B = B$. Este orden parcial corresponde a la relación de inclusión de conjuntos. Es fácil ver con un ejemplo que este retículo no es distributivo. Consideremos una línea D que no coincide con ninguna de las líneas

(direcciones) A, B, C . Es claro que $D \wedge A = 0$, $D \wedge B = 0$, $D \wedge C = 0$, y por lo tanto: $(D \wedge A) \vee (D \wedge B) \vee (D \wedge C) = 0$. Sin embargo, $(A \vee B \vee C) \wedge D = D \neq 0$ (Martínez, 2005, p. 231).¹²⁰ Por ello, se puede afirmar que el retículo $\langle H, \cap, \oplus \rangle$ no es un álgebra de Boole¹²¹, ya que no obedece a la ley distributiva.

En la lógica cuántica, los subespacios de un espacio de Hilbert forman una estructura llamada retículo cuántico, donde se pueden realizar operaciones como la intersección (los vectores comunes a dos subespacios) y la suma lineal (el subespacio que contiene todos los vectores de ambos). Por ejemplo, si dos subespacios son líneas perpendiculares como el eje x y el eje y , su intersección es el origen (0) y su suma es todo el plano. Además, hay un orden parcial que indica si un subespacio está contenido en otro. Sin embargo, este retículo no se comporta como una lógica clásica (o álgebra de Boole) porque no cumple con la ley distributiva; esto refleja cómo los estados cuánticos no siempre

¹²⁰ Este ejemplo muestra que un retículo proposicional cuántico no satisface la ley distributiva. Sin embargo, puede mostrarse que un retículo cuántico satisface la condición de ortomodularidad: $A < B \rightarrow B = A \vee (B \wedge A^\perp)$. $A^\perp$ es el orto-complemento de A , correspondiente a la negación selectiva de A . El desarrollo del programa de lógica cuántica posterior al de Birkhoff y von Neumann puede verse como un intento por interpretar esta ley de orto-modularidad, y de entender el sentido en que, supuestamente, esta ley ortomodular podría jugar un papel similar al que juega la distributividad en los cálculos clásicos. (Martínez Muñoz, 2005, p. 232)

¹²¹ Un álgebra de Boole es un sistema $\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, C, 0, 1 \rangle$ - donde $B \neq \emptyset$, $\sqcup$ y $\sqcap$ son operaciones binarias en B , C es una expresión unaria en B , $0 \in B$ y $1 \in B$ (estos últimos serían sus valores de verdad)- que satisface los siguientes axiomas:

$x \sqcup y = y \sqcup x$	$x \sqcap y = y \sqcap x$
$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap x$	$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup x$
$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
$x \sqcup Cx = 1$	$x \sqcap Cx = 0$
$x \sqcup 0 = x$	$x \sqcap 1 = x$

Otra noción equivalente, basada en nociones de orden, es que un álgebra de Boole es un retículo distributivo y complementado. (Mosterín y Torreti, 2010, pp. 29-30)

siguen las reglas intuitivas de la lógica clásica. Por ejemplo, al combinar varias líneas y luego intersectarlas con otra, los resultados pueden no coincidir con lo esperado en una lógica tradicional. Esto hace que la lógica cuántica sea única y adecuada para describir los sistemas cuánticos.

Con un ejemplo menos formal explicaremos por qué no se cumple la mencionada ley de la lógica tradicional, conocida como la de distributividad:

$$[p \wedge (r \vee s)] = [(p \wedge r) \vee (p \wedge s)]$$

Por mencionar un caso, si un hombre es alto y tiene los ojos azules o marrones, entonces el hombre es alto con ojos azules, o alto con ojos marrones. Lo particular en la lógica cuántica es que “ q_y ” no es distributiva sobre “ q_o ” como sí lo es “ y ” sobre “ o ”. Por ejemplo, consideremos una partícula que se desplaza sobre una recta. Sean p , q y r las proposiciones siguientes.

p = la partícula tiene una determinada velocidad v

q = la partícula se encuentra en el intervalo $[-1,1]$

r = la partícula está fuera del intervalo $[-1,1]$

Notamos que la proposición “ $q \circ r$ ” es verdadera, pues es del tipo “ $p \vee \sim p$ ”. Por lo tanto,

$$p \circ_y (q \circ_o r) = p \dots\dots\dots(\alpha)$$

Pero, por otro lado, las proposiciones

$$p \circ_y q$$

$$p \circ_y r$$

resultan ser falsas pues cada una postula valores simultáneos de posición y momento lineal (o velocidad) con mayor exactitud de lo que sería permitido por la relación de indeterminación de Heisenberg¹²². Por ende $(p \text{ } q_y \text{ } q) \text{ } q_o (p \text{ } q_y \text{ } r) = F \dots \dots \dots (\beta)$

Por comparación entre (α) y (β) tenemos que

$$p \text{ } q_y (q \text{ } q_o \text{ } r) \neq (p \text{ } q_y \text{ } q) \text{ } q_o (p \text{ } q_y \text{ } r)$$

Por consiguiente, “ q_y ” no es distributiva sobre “ q_o ” en la forma que “ y ” es distributiva sobre “ o ”.

Para terminar esta parte señalaremos que

Uno puede formular una lógica de proposiciones del tipo ordinario utilizando el “no” ordinario y el “o” ordinario. Dicha lógica tiene la propiedad distributiva indicada más arriba y se le conoce como álgebra booleana. Pero, también uno puede formular una estructura formal del tipo apropiado a “ q_y ” y “ q_o ” (junto con una negación cuántica apropiada). Esta nueva lógica tiene un uso interesante. Uno puede captar los elementos esenciales de la estructura de superposición¹²³, tan característica de los sistemas

¹²² Según el principio de incertidumbre de Heisenberg, un observador puede determinar o bien la posición exacta de una partícula en el espacio o bien su momento (el producto de la velocidad por la masa) exacto, pero nunca ambas cosas simultáneamente. Cualquier intento de medir ambos resultados conlleva imprecisiones.

¹²³ La superposición cuántica ocurre cuando un objeto “posee simultáneamente” dos o más valores de una cantidad observable. Esto sucede en la paradoja del gato de Schrödinger, según el cual un gato está encerrado en una caja que contiene, además del animal, un átomo radiactivo, un contador Geiger y una ampolla de cianuro cuyo contenido cae en un cubo con ácido cada vez que el contador Geiger detecta la emisión de partículas radiactivas. Si se emite la partícula, el detector romperá la ampolla y el gato morirá. Si no se emite, la ampolla seguirá intacta y el gato vivirá. La probabilidad de que el gato permanezca con vida es del 50%. Solo abriendo la caja averiguaríamos qué le ha ocurrido al gato, pero mientras tanto este estaría “vivo y muerto a la vez”.

Otro experimento en el que interviene la superposición es el de la doble rendija. Por medio de este experimento se comprobó que la luz tiene naturaleza ondulatoria ya que se formaba

cuánticos, representando la estructura de las proposiciones acerca de los sistemas cuánticos. (Sklar, 1994, p. 287)

3. Interpretaciones de la lógica cuántica

Escribe Maldonado:

La lógica cuántica encuentra en el problema de la condicionalidad de los eventos el más idóneo de los terrenos epistemológicos. Por este motivo, hunde sus raíces, férreamente, en el dominio de la lógica. Por ende, se pregunta: ¿qué clase de implicaciones tienen o admiten los eventos cuánticos? En otras palabras, el tema que surge aquí es el de la posibilidad de considerar las implicaciones y proposiciones de la mecánica cuántica sin ambigüedades ni contradicciones. (Maldonado, 2007, p. 168)

Piscoya afirma que podría hablarse de la necesidad de la creación de un tipo de lógica no-clásica denominada lógica cuántica que sería distinta básicamente en sus reglas de formación, pero no en las de deducción. (Piscoya, 1995a, p. 17). Esto se contrapone al proyecto actual que busca especificar un tipo específico de implicación para los eventos cuánticos.

Pero, de acuerdo a Mosterín y Torreti y en apoyo a la postura de Piscoya, el “condicional” de la lógica cuántica tendrá que ser la relación

un patrón de interferencia en una placa fotosensible colocada al final de las dos placas. Sin embargo, algo extraño ocurre cuando utilizamos electrones. Si se repite el experimento ahora disparando muchos electrones (partículas de materia), vemos que se genera un patrón de interferencia. Pero, cuando se observa a las partículas justo antes de pasar por las dos rendijas, el patrón de interferencia desaparece y en su lugar se forman dos líneas solamente, es decir, el electrón se comporta como materia esta vez. De esta manera quedó demostrada la naturaleza dual onda-partícula de las partículas subatómicas.

→ entre proposiciones que corresponde, en virtud del isomorfismo g que proviene de la biyección $g: B \mapsto b$, a la relación que ordena parcialmente el retículo de los subespacios. Ciertamente, la mecánica cuántica no razona mediante un nuevo *modus ponens*; pero los defensores de la lógica cuántica siguen usando el *modus ponens* clásico para deducir teoremas matemáticos e incluso en sus razonamientos filosóficos¹²⁴. Por todo ello, cuesta ver más que un simpático juego de palabras en la denominación “lógica cuántica”. (Mosterín y Torreti, 2010, pp. 346-347)

El asunto se torna más controvertido cuando se hace la propuesta de que la “lógica” cuántica debería ser interpretada como “lógica” *per se* en el pleno sentido de la palabra. El hecho de que la mecánica cuántica por analizar la misma realidad a escala micro-fundamental es supuestamente la teoría más confiable y general que tenemos a disposición, sugiere que la lógica cuántica es la lógica real, la lógica del mundo empírico, la lógica que dibuja la misma realidad. Sobre esta base, Putnam ha sugerido la analogía con el abandono de la geometría euclidiana debido al desarrollo de la teoría de la relatividad de Einstein.

Putnam argumenta que existe la posibilidad real de que nuestros descubrimientos sobre física cuántica muestren que la lógica clásica no es empíricamente correcta; considera que hay una analogía perfecta entre lo que ocurrió en geometría a finales del siglo XIX y lo que puede ocurrir en el caso de la lógica con los fenómenos cuánticos. Rechaza Putnam que todo cambio de lógica

¹²⁴ Es preciso anotar que cuando cuestionamos la ley distributiva, esto hace que ya no sigamos ante una lógica clásica, pues el rechazo (aun cuando sea sólo parcial) de un axioma clásico ya nos lleva a otra lógica.

no sea más un cambio en el significado que asignamos a las expresiones lógicas. (Martinez Vidal, 2007, p. 95)

Si la lógica clásica que normalmente manejamos pertenece al mundo de lo macro, ahora que nos hemos topado con una realidad cuántica a escala micro donde parece que las leyes de la lógica no se cumplen del todo, esto nos plantea una curiosa pregunta ¿debemos replantear toda nuestra lógica? Escribe Sklar:

La idea ahora es que, así como la relatividad nos mostró que la geometría euclidiana, en su día considerada como válida para el mundo, era en realidad falsa y debía ser reemplazada por razones empíricas por la geometría no-euclidiana del espacio-tiempo, así la mecánica cuántica nos dice que la lógica booleana estándar a la que estábamos tan acostumbrados es incorrecta como lógica del mundo. Los hechos empíricos nos llevan a ver que la verdadera lógica del mundo es una caracterizada por la lógica no distributiva de la mecánica cuántica y no por la lógica distributiva que, creíamos, describía correctamente las relaciones entre proposiciones sobre el mundo. Desde este punto de vista, “ q_y ” es en realidad “ y ” y “ q_o ” es “ o ”. Sucede únicamente que algunas cosas que considerábamos verdaderas sobre “ y ” y “ o ” son falsas, ocupando otras cosas verdaderas su lugar. (Sklar, 1994, pp. 287-288)

Así, pues, notamos que la lógica cuántica suscitó toda una serie de expectativas sobre futuros desarrollos basados en ella. En resumen, Putnam propuso tres tesis:

- (1) La lógica clásica es una ciencia empírica; algunas de las “verdades necesarias” de la lógica clásica podrían volverse falsas por razones empíricas.¹²⁵
- (2) De la misma manera que la teoría general de la relatividad nos lleva a adoptar una geometría no-euclidiana, nuestra mejor interpretación de la mecánica cuántica nos debe llevar a adoptar una lógica no-clásica.¹²⁶
- (3) Adoptando una lógica no-clásica podemos retener buena parte de las propiedades de un sistema. (Cabello, 2000, p. 504).

Asimismo, Putnam desarrolló su versión del realismo lógico cuántico ofreciendo una radical disolución del problema de la medida¹²⁷.

¹²⁵ Esto supone que la lógica se halla en un nivel superior del lenguaje, en un metalenguaje. Pues bien, si la lógica es un metalenguaje, lo que ella determine, afectará su consistencia en el nivel más básico.

¹²⁶ Esto es correcto, pero no debe ser llevado al extremo. Porque aún sigue habiendo lógica paraconsistente, lógica no monotónica que tienen gran uso en el razonamiento regular como técnico. Además, como están las cosas hoy, ¿qué es la lógica cuántica sino una etiqueta que se aplica a distintos sistemas lógicos incluso divergentes entre sí?

¹²⁷ De acuerdo a Okon:

El formalismo estándar de la mecánica cuántica contiene dos leyes de evolución radicalmente distintas. Por un lado, tenemos la evolución de Schrodinger que es continua, determinista y lineal y por otro la dictada por el postulado del colapso que es, en cambio, discontinua, indeterminista y no-lineal. ¿Cómo acomoda la teoría a este par de evoluciones temporales tan diferentes?, ¿no dan lugar a inconsistencias? De entrada, parece que no, pues el formalismo estándar especifica en qué situaciones se debe utilizar una u otra de las leyes dinámicas. En detalle, se propone lo siguiente:

- i) Cuando no está sucediendo una medición, todos los estados evolucionan de acuerdo con la ecuación de Schrodinger.
- ii) Cuando alguna medición sucede, los estados cambian de acuerdo con el postulado del colapso.

A primera vista, esta receta puede parecer razonable pues implica que en cada momento solo una de las leyes dinámicas debe ser utilizada, evitando así inconsistencias. Sin embargo, al mirarla con más detalle, revela ser sumamente insatisfactoria. El problema es que la receta, esencial para poder utilizar el formalismo cuántico, depende crucialmente del concepto de medición, pero esta noción no tiene un significado preciso dentro del mismo formalismo. El resultado es entonces, en el mejor de los casos, un formalismo vago, con dos leyes de evolución incompatibles y sin un criterio preciso

Según Putnam, el problema de la medida (y de hecho todas las demás “paradojas” de la mecánica cuántica) surge a través de una aplicación incorrecta de la ley distributiva, y por lo tanto *desaparece* una vez que se reconoce esto. Específicamente, Putnam pone restricciones a la aplicación de la ley de la distributividad.

Por esta restricción, Resnik considera que, ante los fenómenos observados por los físicos cuánticos, lo que debemos hacer es restringir las aplicaciones de la regla de distribución de la conjunción sobre la disyunción (reglas que los fenómenos de la cuántica no siguen) de manera que establezcamos que esa regla no es aplicable en ese ámbito

De este modo, evitaríamos el peligro de caer durante algún tiempo, en la incoherencia total. Tampoco necesitamos abandonar las normas que rodean a la deducción. Sin embargo, podemos cambiar, por ejemplo, lo que cuenta como una implicación o como un contrario sin abandonar las normas que nos comprometen con lo que nuestras teorías implican o que nos prohíben afirmar simultáneamente dos contrarios (Martinez Vidal, 2007, p. 103)

No obstante, A. Clemente de la Torre sugiere que el cambio de lógica resulta ser un procedimiento desesperado además de incorrecto:

El valor de las lógicas cuánticas radica en que, a través del mismo, se logra un profundo análisis de la estructura de mecánica cuántica, antes que en la posibilidad concreta de reemplazar la lógica clásica. Todos los sistemas lógicos propuestos han sido criticados por alguno u otra falla técnica, cosa no tan grave,

para decidir cuál de las dos debe ser utilizada en cada momento. Este es, en pocas palabras, el problema de la medición en mecánica cuántica. (Okon, 2014, pp. 133-134)

porque, en principio, dichas fallas son subsanables con modificaciones en la estructura de la propuesta. Destaquemos, además, que, en cada caso, la mecánica cuántica juega un papel importante, por ejemplo, en la determinación de valores de verdad para las proposiciones, de modo que la lógica queda subordinada a la mecánica cuántica, contrariamente a la creencia de que la lógica está por encima de todas las ciencias. Por más importantes que seamos los físicos cuánticos, no lo somos tanto como para exigir que todo el mundo aprenda a razonar de otra manera porque así se solucionan ciertas dificultades de la teoría. La solución a los problemas debería pasar por una revisión de los conceptos físicos y no defenestrando a la lógica. Mucho más grave, y posiblemente irremediable es el hecho de que las lógicas cuánticas no son alternativas posibles a la lógica clásica, porque la misma presentación y aprendizaje de sus estructuras, la selección de sus axiomas, las opciones entre alternativas, etc., se hacen utilizando la lógica clásica que se pretende abolir. Todo sistema axiomático está basado en postular la verdad incuestionable de sus axiomas, lo que implica la falsedad de la negación de los mismos. Pero si, además, existe otro valor de verdad indeterminado, negar un axioma no necesariamente sería falso. Estos argumentos sugieren considerar las lógicas cuánticas como interesantes cálculos [proposicionales] con los cuales se pone en evidencia la estructura de la mecánica cuántica, pero no como sistemas alternativos a la lógica clásica. Consideramos entonces esta primera opción, la de

negar la lógica clásica, como interesante pero imposible. (Clemente de la Torre, 2000, pp. 111-112) ¹²⁸

Si con la lógica se busca explicitar las relaciones formales que rigen los razonamientos válidos, no queda claro cómo deberíamos cambiar de lógica para ahora razonar mejor acerca de los procesos micro-físicos.

Es decir, ¿nos muestra realmente la mecánica cuántica que deberíamos sustituir nuestra lógica clásica por una nueva lógica? Y ¿eliminamos con ello realmente los aspectos paradójicos del mundo cuántico? Una objeción es que, aunque “ q_y ” y “ q_o ” jueguen un papel útil, sería totalmente erróneo pensar en ellos como sustitutos de “ y ” y “ o ”. Un problema es que “ y ” y “ o ” todavía juegan, en su significado tradicional, un papel en la descripción cuántica del mundo. (...) Es, pues, erróneo pensar que en la imagen cuántica del mundo “ q_y ” y “ q_o ” reemplazan, antes que complementan, a “ y ” y “ o ”. (Sklar, 1994, pp. 288-289).

Esto lo ilustra el teorema de Kochen y Specker¹²⁹ quienes en 1967 demostraron que, si el espacio de Hilbert H_F tiene más de dos

¹²⁸ Con esta afirmación, Clemente de la Torre daría a entender que no distingue entre lenguaje objeto (en el que está la mecánica cuántica, cuyos teoremas se demuestran empleando la lógica clásica), y el metalenguaje (la interpretación de la mecánica cuántica).

¹²⁹ El teorema de Kochen y Specker afirma que es imposible que exista una teoría alternativa a la mecánica cuántica (como la de variables ocultas), que reúna las siguientes características:

(1) Los resultados de todas las magnitudes medibles (“observables”) existen antes de ser observados.

(2) Los resultados preexistentes mencionados en (1) son independientes de cuales sean los otros observables que se midan conjuntamente sobre el mismo sistema individual. (condición de no-contextualidad).

(3) Las predicciones de una teoría de variables ocultas sobre los resultados de cualquier experimento realizado en un sistema individual coinciden con las predicciones de la mecánica cuántica. (Cabello, 1997, p. 67)

Las teorías de variables ocultas son formulaciones alternativas que suponen la existencia de ciertos parámetros desconocidos que serían los responsables de las características estadísticas de

dimensiones, los conectores de la lógica cuántica tal y como han sido definidos no pueden ser funciones veritativas. Su significado y su alcance ontológico no pueden, por eso, ser los mismos de los conectores homólogos de la lógica ordinaria (o clásica). Además, este teorema asegura que los experimentos sobre un sistema cuántico no tienen resultados predefinidos.

Otra objeción corriente a la tesis de la sustitución es que la argumentación utilizada en la propia discusión supone las reglas de la lógica estándar. Esto último puede comprenderse a la luz de la siguiente cita:

Saúl Kripke ha observado que si lo que ocurre es que los lógicos cuánticos utilizan la lógica clásica para derivar una contradicción y luego utilizan un meta-lenguaje clásico para definir la lógica cuántica, entonces la propuesta no es la de que abandonemos la lógica clásica. Si, por el contrario, lo que pretenden es que sustituyamos la lógica clásica por lógica cuántica también en el metalenguaje, entonces sencillamente no entenderemos lo que hacen. (Martinez Vidal, 2007, p. 96)

Saúl Kripke ha señalado un punto crucial sobre el uso de la lógica cuántica. Si los lógicos cuánticos emplean la lógica clásica para derivar una contradicción y luego utilizan un metalenguaje clásico para definir la lógica cuántica, esto sugiere que no están proponiendo abandonar la lógica clásica por completo, sino que están trabajando dentro de su marco

la mecánica cuántica. Dichas formulaciones pretenden restablecer el determinismo eliminado por la interpretación de la escuela de Copenhague, que es la interpretación estándar en mecánica cuántica.

para justificar la lógica cuántica en ciertos contextos. Sin embargo, si lo que proponen es reemplazar la lógica clásica con lógica cuántica incluso en el nivel del metalenguaje, el resultado sería problemático, ya que el metalenguaje perdería su capacidad para explicar o fundamentar lo que hacen. Por ejemplo, al tratar de definir las reglas de la lógica cuántica en términos de sí misma, sin recurrir al metalenguaje clásico, se corre el riesgo de entrar en un círculo vicioso donde las propias reglas no pueden justificarse ni explicarse de manera clara. Esto destaca la necesidad de mantener un sistema clásico en el metalenguaje para dar sentido y coherencia a la propuesta de la lógica cuántica.

La situación dentro de la mecánica cuántica parece inducirnos verdaderamente o a modificar la lógica o a modificar el cálculo de probabilidades que se emplean en la misma. Contra la modificación de la lógica se levantan, por lo menos, dos razones “prácticas” de gran peso. En primer lugar, está el hecho de que las matemáticas que se usan en la construcción de tal teoría están edificadas mediante una lógica “clásica”, por lo cual, si la teoría –como se requeriría para una axiomatización totalmente rigurosa– fuera expuesta junto con una formalización explícita de sus matemáticas, contendría dos lógicas incompatibles.

En segundo lugar, la verificación de la teoría de los cuantos se produce en el terreno de la física clásica –o sea, empleando aparatos clásicos y teorías clásicas para interpretar sus respuestas– y la misma está construida mediante la lógica bivalente; por lo tanto, aunque fuera posible construir de este modo una teoría cuántica, la misma no sería verificable de un modo coherente (Agazzi, 1978, p. 451). Asimismo, Bunge sostiene lo siguiente:

(...) una teoría revolucionaria, si es científica, no se rebelará contra todo, sino que será compatible con la lógica, con la mayoría, si no la totalidad, de las matemáticas, y con diversas teorías factuales consideradas verdaderas en una primera aproximación. (El rumor originado por von Neumann y propagado por unos pocos matemáticos y filósofos, según los cuales la mecánica cuántica implica una revolución en la lógica, carece de base; cuando se axiomatiza esta teoría se advierte que presupone ciertas teorías matemáticas que llevan embutidas la lógica ordinaria. Además, si la mecánica cuántica obedeciera a una lógica propia, no podría unirse a teorías clásicas, v. g., la [de] Maxwell, para derivar enunciados contrastables.) (Bunge, 1978, p. 244)

Se trata de que el concepto mismo de teoría científica se funda en el empleo de una lógica bivalente. Es sabido que una teoría *debe* ser modificada si de sus hipótesis se deduce una contradicción con los datos experimentales, y ello solo tiene sentido a causa de que una tal contradicción formal significa que hipótesis y datos experimentales no pueden ser simultáneamente verdaderos, es decir, que por ser las proposiciones que expresan datos experimentales *verdaderas*, alguna de las hipótesis debe resultar *falsa*. Hasta aquí, por tanto, resulta que en la teoría *admitimos* todo lo que puede ser supuesto verdadero y excluimos todo lo que pueda suponerse falso. ¿Cuál debería ser entonces nuestra postura, si se admitiera la existencia de un estado intermedio entre verdadero y falso? En estas circunstancias el hecho de que de ciertas hipótesis se obtenga una conclusión falsa, no tendría quizás por qué obligarnos a modificar la teoría, con tal de que pudiera demostrarse que

ello era compatible con el hecho de que ciertas hipótesis fueran consideradas en dicho estadio, más que como verdaderas, como “admitidas”.

En realidad, la única situación en la cual estaríamos obligados a modificar la lógica sería aquella en que partiendo de datos experimentales y operando con la lógica llegáramos a resultados que fueran contradictorios con otros datos de hecho. Sin embargo, puede demostrarse que ello no es posible en la lógica clásica. (Agazzi, 1978, 451) Por estos motivos, de hecho, la postura de Putnam ha cambiado. Su propuesta fue ampliamente considerada como errónea. (Wilce, 2012)

4. Actualidad de la lógica cuántica

El 23 de agosto del 2010, Serge Haroche, dijo que han demostrado que pueden utilizar la extraña lógica de la física cuántica, por ejemplo, ante el hecho de que una puerta puede estar abierta y cerrada al mismo tiempo y que una vez que uno lo ha observado, el sistema tiene que colapsar en una de las posibilidades. La meta última sería llegar a la computación cuántica¹³⁰. Sostuvo, además, que los algoritmos que uno puede basar en la lógica cuántica son mucho más rápidos que los que podemos desarrollar con las computadoras clásicas. El problema matemático y práctico es que hasta ahora hay muy pocos algoritmos útiles basados en la lógica cuántica. La meta está muy lejos y hay una cantidad de dificultades por delante que se deben enfrentar. Por ejemplo,

¹³⁰ La computación cuántica es un paradigma de computación distinto al de la computación clásica. Se basa en el uso de qubits en lugar de bits, y da lugar a nuevas puertas lógicas que hacen posibles nuevos algoritmos.

el hecho de que el sistema se comporta de manera cuántica sólo cuando está aislado de toda perturbación del entorno. Las perturbaciones del entorno dan nacimiento a lo que conocemos como “decoherencia cuántica”¹³¹, la pérdida de las propiedades cuánticas. (Dora Bär, 9 de octubre del 2012)

En octubre de 2011, la lógica cuántica emergía como un campo fascinante de la física, con el potencial de revolucionar la computación. A diferencia de la lógica clásica, que opera con valores binarios (verdadero o falso), la lógica cuántica permite que las variables estén en superposición, lo que significa que pueden representar múltiples estados simultáneamente. Este fenómeno, junto con el entrelazamiento cuántico, abre la puerta a nuevas formas de computación, como los ordenadores cuánticos, que podrían superar las capacidades de los ordenadores tradicionales.

Los ordenadores cuánticos, basados en qubits en lugar de bits, aprovecharían la superposición y el entrelazamiento para realizar cálculos a velocidades mucho más rápidas y eficientes. Este avance tiene aplicaciones potenciales en áreas como la criptografía, la inteligencia artificial y la simulación de sistemas complejos. Aunque la computación cuántica sigue siendo un campo en desarrollo, los avances recientes sugieren que los ordenadores cuánticos podrían convertirse en una realidad en el futuro cercano, marcando el comienzo de una nueva era tecnológica. (Universitat, 2 de Octubre 2011)

¹³¹ Este término es usado para explicar cómo un sistema físico, bajo ciertas condiciones específicas, deja de exhibir efectos cuánticos y pasa a exhibir un comportamiento típicamente clásico, sin los efectos contraintuitivos típicos de la mecánica cuántica.

El 9 de Octubre del 2012, el francés Serge Haroche y el estadounidense David Wineland fueron honrados con el Premio Nobel de Física del 2012, por ser autores de revolucionarios métodos experimentales para la medición y manipulación de sistemas cuánticos individuales. Específicamente, Haroche experimentó con los átomos de Rydberg. Al acoplar estos átomos en las cavidades de un superconductor con pocos fotones, alcanzó poner a prueba las leyes de la “decoherencia cuántica” y demostrar que es posible llevar a cabo operaciones de lógica cuántica prometedoras para el tratamiento de información.

El 17 de marzo de 2014, el físico ganador del Premio Nobel, Serge Haroche, ofreció una reflexión profunda sobre el futuro de la lógica cuántica, señalando que, en un plazo de 50 años, podríamos ver aplicaciones de esta tecnología que transformen áreas como la computación, las comunicaciones y la criptografía. Sin embargo, Haroche subrayó que esas aplicaciones probablemente no serán las que imaginamos hoy, ya que el desarrollo de la ciencia cuántica podría llevar a descubrimientos y avances inesperados. La naturaleza impredecible de la investigación en física cuántica, junto con su capacidad para desafiar nuestras concepciones actuales de la realidad, sugiere que las tecnologías basadas en la lógica cuántica podrían abrir nuevas fronteras en campos que ni siquiera hemos comenzado a explorar plenamente.

El 16 de marzo del 2017, se dio a conocer que ya se habían diseñado una puerta lógica cuántica muy potente. Esta investigación teórica explora lo que podría lograrse más allá de las limitaciones tecnológicas actuales para guiar el trabajo experimental posterior. Las puertas lógicas son, junto con los qubits (la versión cuántica del bit 0/1), las piezas

elementales con las que construir, como en un juego de bloques, un ordenador cuántico. Es importante que sean rápidas no solo para acelerar los cálculos, sino también para minimizar las interacciones perjudiciales debidas al ruido ambiental. (UPV/EHU, 16 de marzo del 2017).

CUESTIONARIO # 9

1. ¿Qué autores desarrollaron la lógica cuántica?

- a) Boole y Frege
- b) Birkhoff y von Neumann
- c) Gödel y Russell

2. ¿Qué interpretación moderna tiene la lógica cuántica?

- a) Es una modificación de la lógica clásica.
- b) Reemplaza la lógica modal en sistemas físicos.
- c) Aplica principios matemáticos a fenómenos cuánticos.

3. ¿Qué característica define a la lógica cuántica?

- a) Cuestiona la distributividad.
- b) Depende del principio de razón suficiente.
- c) Es equivalente a la lógica clásica.

4. ¿Quién afirmó que podríamos modificar la lógica clásica sobre la idea de adoptar una física cuántica como base para la ciencia?

- a) Putnam.
- b) Miró Quesada.
- c) Piscoya.

5. ¿Qué problema no está relacionados a la física cuántica?

- a) El experimento de la doble rendija.
- b) El principio de incertidumbre de Heisenberg.
- c) El experimento de Oersted.

6. ¿Para qué autor no es cierto que la mecánica cuántica implique una revolución en la lógica?

- a) Bunge.
- b) Piscoya.
- c) Von Neumann.

7. Un álgebra de Boole, en tanto estructura algebraica que esquematiza operaciones lógicas, se caracteriza por poseer.

- a) un valor de verdad.
- b) dos valores de verdad.
- c) tres valores de verdad.

8. Para Mosterín y Torreti, la mecánica cuántica no razona mediante un nuevo *modus ponens*; pero los defensores de la lógica cuántica siguen usando el *modus ponens* clásico para deducir teoremas matemáticos e incluso en sus razonamientos filosóficos. Por ende,

- a) la lógica cuántica es novedosa y tiene sentido.
- b) la lógica cuántica solo es un simpático juego de palabras.
- c) la lógica cuántica es relevante y respetable.

9. ¿Qué principio de la física cuántica motiva una lógica cuántica que desafía la distributividad?

- a) Principio de incertidumbre de Heisenberg.
- b) La paradoja del mentiroso
- c) La paradoja del continuo

10. ¿Qué aplicación práctica tiene la lógica cuántica?

- a) Computación cuántica.
- b) Curación cuántica.
- c) Psicomagia.

Solucionario: 1b, 2a, 3a, 4a, 5c, 6a, 7b, 8b, 9a, 10a.



CAPÍTULO 10

LA NECESIDAD DE ESTUDIAR PARADOJAS MORALES

Resumen: En este capítulo transformamos a las paradojas en urgencias morales para mostrar su aspecto humano y social. En principio, explicamos la crisis moral en la que nos encontramos a nivel global y local. Definimos a los dilemas y exponemos algunas paradojas que deberían ser discutidas por la juventud y las instituciones académicas para poder construir una sociedad mejor en el futuro. Estas urgencias morales tratan acerca de temas tales como la tolerancia, el trabajo, la paz, el hambre, la educación, entre otros y su valor radica en que son problemas que nos involucra con cuestiones prácticas y cotidianas que, sin embargo, no están recibiendo la atención que merecen.

1. La crisis moral

Léase lo siguiente:

Había una colmena que se parecía a una sociedad humana bien ordenada. No faltaban en ella ni los bribones, ni los malos médicos, ni los malos sacerdotes, ni los malos soldados, ni los malos ministros. Por descontado tenía una mala reina. Todos los días se cometían fraudes en esta colmena; y la justicia, llamada a reprimir la corrupción, era ella misma corruptible. En suma, cada profesión y cada estamento, estaban llenos de vicios. Pero la nación no era por ello menos próspera y fuerte. En efecto, los vicios de los particulares contribuían a la felicidad pública; y, de rechazo, la felicidad pública causaba el bienestar de los particulares. Pero se produjo un cambio en el espíritu de las abejas, que tuvieron la singular idea de no querer ya nada más que honradez y virtud. El amor exclusivo al bien se apoderó de los corazones, de donde se siguió muy pronto la ruina de toda la colmena. Como se eliminaron los excesos, desaparecieron las enfermedades y no se necesitaron más médicos. Como se acabaron las disputas, no hubo más procesos y, de esta forma, no se necesitaron ya abogados ni jueces. Las abejas, que se volvieron económicas y moderadas, no gastaron ya nada: no más lujos, no más arte, no más comercio. La desolación, en definitiva, fue general. La conclusión parece inequívoca. Dejad, pues, de quejaros: sólo los tontos se esfuerzan por hacer de un gran panal un panal honrado. Fraude, lujo y orgullo deben vivir, si queremos gozar de sus dulces beneficios. (Mandeville, 1982, p. xxix)

La cita que inicia esta parte constituye una de las tantas narraciones que los escritores usan para transmitir sus enseñanzas. Estas se conocen bajo el nombre de fábulas. Analizar *La fábula de las abejas* de Bernard de Mandeville (1982) es interesante e inquietante.

Esta fábula parece defender la idea de que uno no se debe esforzar por ser bueno, noble y justo, porque la prosperidad económica depende de qué tan corrupta pueda estar la sociedad entera. Sin embargo, el mensaje también puede ser otro muy distinto. Lo que esta fábula podría enseñar es que aún no estamos listos para imaginarnos una sociedad diferente a la capitalista. Por el momento, cualquier otra opción nos parecerá inferior y hasta primitiva, a tal punto que estamos dispuestos a soportar la injusticia, la desigualdad, el hambre, la enfermedad y la pobreza, si con ello se aseguran ganancias a cambio de esfuerzo, creatividad e ingenio.

En realidad, lo que esta fábula nos muestra es lo dispuestos que estamos para aceptar el mal, si a cambio de eso se nos permite la posibilidad de acumular fortuna gracias a la defensa del libre mercado. Al parecer nos han convencido intensamente de que es más conveniente la remotísima posibilidad de poder ser millonario, aunque no se tenga asegurados ni la vivienda, ni la salud, ni la educación, ni el trabajo, que vivir en una nueva y mejor sociedad donde puedan estar garantizadas la vivienda, la salud, la educación y el trabajo, pero sin que se permita acumular riqueza privada de forma excesiva. Esta es una de las ideas a las cuales hay que dar dura batalla.

A diferencia de las fábulas, las paradojas son retos a la razón no porque narren una historia, sino más bien porque ponen sobre la mesa

un problema que reclama urgente solución. Sin embargo, su objetivo es casi el mismo, a saber, hacernos pensar y contemplar otras opciones. De ahí la necesidad de incluir a las paradojas como parte de la educación de todos los peruanos, pues educación es más que transmitir datos. La educación debe preocuparse por inculcar conocimientos, pero también debe ser una prioridad el tratar de difundir valores importantes para la formación de la ciudadanía. Esta ciudadanía que se aprende en las escuelas debe considerar al diálogo, la empatía y la solidaridad como elementos esenciales para la buena educación del ser humano. Lamentablemente, los objetivos morales de la educación no se están cumpliendo, y esto es tan cierto de la sociedad peruana como del mundo. A continuación, como muestra, explicaremos los principales problemas del mundo y del Perú.

Denegri (2 de julio del 2017) ya advirtió que existen siete plagas que son señales de la destrucción de la humanidad. La primera es la superpoblación. Este problema es indicativo del poco conocimiento de los métodos anticonceptivos y del egoísmo que tienen las personas que no contemplan la opción de la adopción como un mecanismo para formar una familia. La segunda es la violencia, la cual se produce porque el ser humano es jerárquico y territorial. Es decir, para él solo cabe mandar y obedecer y, además, no considera el compartir su propiedad o vivienda con nadie que no sea de su interés. La tercera es la drogadicción y el narcotráfico. El ser humano ya no está acostumbrado a estar solo consigo mismo, está abandonando su capacidad de introspección para entregarse por completo al mundo de las redes sociales y así lograr aprobación por parte de propios y extraños. Por eso triunfa la droga, pues el hombre

quiere evadirse del mundo y también de sí mismo. Siendo así, cada vez está más lejano el ideal de construir una personalidad auténtica y de peso que pueda liderar e impulsar movimientos de cambios hacia mejor.

La cuarta es el terrorismo, el cual es la alternativa que eligen quienes no ven otra opción ante la indiferencia de sus gobiernos y ante el caos imperante en el mundo. Asimismo, suele ser el accionar de grupos extremos que no tienen otro objetivo que cumplir sus propias agendas, aunque cueste la muerte de civiles inocentes. La quinta es la destrucción ecológica. El hombre cotidiano, pero también la industria moderna, es responsable de la gran cantidad de desechos que hoy se generan. Con el fin de abaratar costos, para algunas empresas no importa si se ensucia el aire que respiramos o el agua que bebemos. La sexta es el calentamiento global, en parte como consecuencia del maltrato que le prodigamos a la naturaleza.

El derretimiento de los polos está causando cambios evidentes en los climas y ante esto no existe una política clara a nivel mundial que permita enfrentar esto adecuadamente. La séptima es el aumento de las enfermedades, como la pandemia que nos ha tocado vivir en esta segunda década del siglo XXI. Algunos expertos aseguran que estos agentes patógenos se difunden cuando el ser humano, en su afán de expandirse, invade territorios de los animales e inevitablemente facilita que las enfermedades de estos últimos pasen al ser humano de modo sigiloso. Denegri a lo anterior le suma el incremento de la estupidez y la evidente disminución de la inteligencia en el mundo.

Ahora bien, también existen problemas a nivel nacional. Y no son pocos. De acuerdo a *Gestión* (11 de diciembre del 2017), los peruanos

tienen al menos catorce problemas. El primero es que tienen miedo a ser asaltados en la calle, pues los niveles de inseguridad se han vuelto insoportables (consideremos el tema de la extorsión). El segundo es que falta dinero y no alcanza para comprar los principales alimentos que conforman la canasta básica. El tercero tiene que ver con el elevado costo de los servicios básicos, pues las empresas privadas de luz y telefonía no consideran la situación de las familias peruanas. El cuarto es que los precios de alquiler de una vivienda o de un puesto en algún mercado o galería son muy elevados. El quinto es que no hay trabajo seguro, pues abundan los trabajos mal pagados e inestables. El sexto es que hay desnutrición, pues la gente no tiene ni recursos ni una cultura alimenticia saludable a tal punto que existe anemia en algunas zonas del país.

El séptimo es que casi todos tienen problemas de salud y no pueden acceder fácilmente al seguro, pues las colas son enormes y las citas no son inmediatas. El octavo es que los colegios y las universidades cobran excesivamente por dar una educación decente y de calidad. El noveno es que algunas viviendas no cuentan con agua ni desagüe como, por ejemplo, las personas que viven en los cerros de Lima. El décimo es que los niveles educativos del ciudadano promedio son bajos e insuficientes como para acceder a puestos laborales con mejor pago¹³². El décimo primero es que existen problemas familiares, con la pareja y con los hijos, dado que hay una nula preocupación por la salud mental en

¹³² También se puede afirmar que en nuestro país existe un desfase entre la oferta laboral y el «elevado» nivel educativo del peruano promedio. Esto sucede porque existe exceso de profesionales en carreras de prestigio tales como medicina, derecho e ingeniería civil cuando lo que necesita el Perú para progresar son más alumnos en carreras técnicas o profesiones que se relacionen con lo que el país produce directamente.

general y, además, porque la primera manera que tienen a la mano para resolver un problema es mediante la violencia. El décimo segundo es que la gente no tiene títulos de propiedad y por eso es que aumentan los traficantes de tierras, al mismo que se observan invasores instalando sus carpas en zonas abandonadas de las ciudades. El décimo tercero es que los pequeños empresarios y el ciudadano común están endeudados con los bancos o con los prestamistas por problemas con sus inversiones o porque han tenido que resolver un problema rápida y urgentemente. Finalmente, el décimo cuarto problema es que en algunas zonas falta luz, internet y alumbrado público, lo que genera no solo pobreza, sino temor a la delincuencia, las pandillas y las personas de mal vivir.

Quizás la paradoja más grande es que, aunque se sepa que todos estos problemas aquejan a la humanidad y al Perú especialmente, nada o muy poco se hace al respecto¹³³. Por este motivo, en esta última parte mostraremos ejemplos de paradojas morales o relacionadas al tema social para que no se piense que solo existen aquellas tradicionales paradojas tan complejas y difíciles de analizar que hemos visto antes en

¹³³ Es importante mencionar al peruano Farid Kahhat quien es uno de los pocos que intenta difundir las paradojas que detecta en cada uno de sus análisis sociales y políticos. Como muestra de este particular interés por las paradojas podemos mencionar a Gonzales (6 de julio del 2016), texto en el que Kahhat reflexiona acerca de la situación paradójica que se generó cuando un partido político español ganó las elecciones generales a pesar de que ese mismo partido ha estado manchado por la corrupción, tiene dirigentes presos e incluso está investigado por el Poder Judicial. Veamos otro ejemplo. En Kahhat (3 de noviembre del 2019) se señala que la situación chilena es una paradoja porque, por un lado, Chile es un país con altos ingresos y poca desigualdad, pero, por otro lado, existe un descontento generalizado de parte del pueblo chileno respecto a su *statu quo*. Finalmente, recomendamos leer a Ledger (28 de mayo del 2022), donde Kahhat afirma que es paradójico que los posibles acuerdos económicos y comerciales que proponga Biden para los países del Indo Pacífico no puedan ir de la mano, al mismo tiempo, con la posibilidad de abrir el mercado norteamericano y facilitar la libre entrada y salida de productos nacionales y extranjeros.

este libro. A partir de aquí se sigue la senda iniciada por Cicerón (2000) cuando escribió *Las paradojas de los estoicos*.

El sabio romano entendía por paradoja aquella expresión que revelaba una verdad que estaba en conflicto con lo que normalmente se aceptaba. Por ejemplo, en la primera paradoja de su libro señala que, a pesar de lo que puedan mostrar las apariencias, perseguir las riquezas, los placeres y el poder no es algo bueno porque, principalmente, genera miedo a perderlos en quien empieza a acumularlos. Por ende, solo es bueno lo honrado, recto y virtuoso. Únicamente mediante estos valores es posible construir un proyecto de país. La codicia desmedida, en cambio, genera divisiones, desconfianza y no origina amor ni por la patria ni por los ciudadanos.

Otro referente es Francisco Miró Quesada (2014) quien en un artículo breve de 1975 titulado *Las paradojas de la revolución* analiza aspectos contradictorios y problemáticos que se vivían durante el régimen del General Morales Bermúdez. Una primera paradoja se vincula con la idea humanista de respetar la dignidad del hombre y al mismo tiempo lograr una revolución despojando del poder a algunos grupos políticos que no quieren ser tratados como medios o instrumentos para otros fines. Otro aspecto se relaciona con la posibilidad de lograr equilibrio entre el socialismo que busca priorizar la igualdad social entre todos los seres humanos y el capitalismo que busca priorizar las libertades individuales y económicas.

A diferencia de Cicerón, nosotros seguiremos con el enfoque problemático de las paradojas morales. Esto significa que no solo nos limitaremos a expresar algo que vaya en contra de la opinión común, sino

que también buscaremos provocar la motivación suficiente en el lector como para que pueda intentar resolver, por su propia cuenta o con ayuda de sus amigos, estos complejos asuntos al estilo de Miró Quesada.

Así pues, en realidad, las paradojas más valiosas y que necesitan una atención urgente no son tanto las que se vinculan con el lenguaje o con la teoría de conjuntos, sino más bien aquellas que se relacionan con aspectos morales de nuestra vida cotidiana y social. Pero antes de conocerlas, definiremos lo que es un dilema pues ya se han mencionado algunos casos anteriormente.

2. Los dilemas

Un concepto cercano al de paradoja es el de dilema. Desde un punto de vista lógico, un dilema es una situación en la que una persona se enfrenta a dos o más alternativas, pero cada una de ellas presenta consecuencias que resultan problemáticas o contradictorias. Por ejemplo, imagina que un gobierno se enfrenta a una crisis económica y debe decidir entre:

1. **Opción A:** Subir los impuestos para financiar programas sociales, lo que ayudaría a las personas más necesitadas, pero podría perjudicar la economía debido a la mayor carga impositiva.
2. **Opción B:** Reducir el gasto público y recortar programas sociales para mejorar la economía, lo que podría estabilizar las finanzas, pero aumentaría la desigualdad y afectaría a las personas vulnerables.

Ambas opciones parecen necesarias desde el punto de vista de los objetivos del gobierno, pero cada una tiene consecuencias problemáticas:

la opción A podría dañar la economía, mientras que la opción B podría causar sufrimiento a los más desfavorecidos.

En términos argumentativos, un dilema puede ser entendido como una estructura en la que se presentan dos (o más) opciones que parecen igualmente válidas o necesarias, pero cada una con implicaciones que pueden ser inaceptables o problemáticas. Es decir, los dilemas son argumentos en los cuales una situación plantea dos tipos de alternativas y las dos alternativas son problemáticas o reprobables a nivel moral. Así pues, sabemos que existen situaciones en las cuales queriendo ser buenos, terminamos siendo malos. Y por más que nos esforcemos, siempre terminaremos haciendo daño o siendo injustos. Revisemos los siguientes seis dilemas.

Imagina que estás ayudando a una persona de la tercera edad a cruzar la calle. Entonces, antes de llegar a la otra parte de la avenida, miras hacia un costado y ves que un niño está jugando en la misma pista en la que viene una combi a toda velocidad y sin frenos. ¿A quién es preferible salvar?, ¿a la persona mayor o al niño? El caso es que cualquier opción que uno tome siempre terminará en algún tipo de daño o injusticia. Si uno salva a la abuela, el niño muere y eso sería malo. Si uno salva al niño, la abuela muere y eso también sería malo. Por lo tanto, hagamos lo que hagamos, siempre resultará algo malo.

Veamos este otro ejemplo. Supongamos que alguien tiene a su madre enferma en el hospital y que para no morir necesita rápida y urgentemente de una costosa medicina que se vende en una farmacia. Sin embargo, dicha persona no tiene dinero para comprar el medicamento. ¿Debería o no debería robar el hijo la cara medicina que su madre

necesita apremiantemente para seguir viviendo? Si lo roba, eso sería algo malo, pues robar es un acto carente de virtud; si no lo roba, entonces ella moriría y eso sería también sería malo.

El siguiente caso también califica como dilema. Carmen fue violada y quedó embarazada, pero en su país no es legal el aborto, ¿debería o no debería abortar Carmen? Si aborta, ello sería malo e ilegal y hasta podría ir a prisión, pero si no aborta, ello significaría traer al mundo a alguien que no ha sido deseado por su propia madre, y ello sería también sería algo malo.

Esta situación también es un dilema. Si tuvieras amoríos con la pareja de tu mejor amigo un día antes de su boda, ¿se lo contarías todo?, ¿sí o no? Por un lado, si se lo cuentas, entonces le harías añicos el corazón. Ello podría causar que quiera golpearte y que busque cancelar la boda y así se echarían a perder las invitaciones, la comida y el pastel y ello sería evidentemente malo. Por otro lado, si no se lo cuentas, no serías honesto, ni realmente un amigo, y ello sería también malo.

Otro dilema más. Imaginemos que en una montaña quedan atrapados tres amigos, uno de los cuales es obeso. Además, la cueva en la que están atrapados comienza a llenarse de agua por uno de los lados. Asimismo, la persona con sobrepeso, que acaba de encontrar una pequeña salida, se queda atrapada en ese único agujero que podría ser la ruta de escape de todos los demás. ¿Qué habría que hacer si uno tuviera un cartucho de dinamita en su mochila? ¿Se debería hacer explotar al hombre obeso para salvar a todos? ¿Qué es lo más preferible? Si uno lo mata, viviría, pero sería un asesino y eso sería malo; si no lo mata, uno moriría y ello, obviamente, sería malo.

En filosofía, cuando se habla del utilitarismo se suele mencionar, para explicarlo de mejor modo, al dilema del tranvía planteado por Philippa Foot (1967). El utilitarismo, en términos generales, es la doctrina filosófica que defiende la idea de que lo bueno es aquello que beneficia en mayor medida al mayor número de personas. Imaginemos que estamos frente a las vías de un tren. El ferrocarril está pasando a toda velocidad. Sin embargo, hay cinco trabajadores ferroviarios que no se han percatado que se les viene el tren encima. Al mismo tiempo, uno tiene la posibilidad de activar un desvío para que el tren cambie su ruta. Lamentablemente, en ese otro camino hay un trabajador solitario. Ahora bien, si activamos el desvío, ya no morirían cinco personas, pero sí moriría ese trabajador solitario. ¿Debemos activar el desvío? Si lo hacemos, no mueren cinco, pero sí muere uno. Esto es malo. Si no lo hacemos, mueren cinco en vez de solo uno. Esto no solo es malo, sino mucho más malo. Por eso, el utilitarismo recomienda activar el desvío, pues así habría menos mal.¹³⁴

Existe otra versión de este dilema planteado en un ámbito médico. Supongamos que hay seis personas en un hospital. Las cinco primeras necesitan un órgano vital para seguir viviendo, en cambio, la sexta

¹³⁴ Existe otra versión más controversial. Imaginemos que estamos sobre un puente acompañados de una persona muy obesa que está al filo del puente. Al mismo tiempo, viene un tren a toda velocidad y todo parece indicar que terminará asesinando a cinco individuos que se encuentran trabajando en el mismo riel por donde pasará el tren. Sabemos, además, que si empujamos al obeso este podrá impedir que el tren siga su camino y así se evitaría que mueran esas cinco personas, pero, inevitablemente, el obeso sería aniquilado. La pregunta es ¿debemos empujarlo? Curiosamente, en el caso anterior casi todos los que fueron consultados aceptan que la mejor alternativa es activar el desvío, pero en este segundo caso, no están tan seguros y lo piensan con detenimiento antes de responder. Esto puede deberse a que mientras en el caso primero el procedimiento parece algo más técnico (se trata de activar un desvío) en el segundo caso el hecho de empujar al obeso hacia su muerte segura parece algo más personal.

persona está en coma desde hace años y tiene todos sus órganos en buen estado. ¿Deberíamos sacrificar a ese paciente para poder salvar a los otros cinco?

Es interesante notar que los dilemas pueden llevarnos a debatir y a evaluar las opciones o incluso a proponer alternativas no previstas. Con esto se ejercita el pensamiento crítico, al igual que ocurre con las paradojas. En lo que sigue, presentaremos varias paradojas entendidas como urgencias morales que necesitan ser debatidas, discutidas y, si es posible, superadas para poder colaborar con el desarrollo y el buen desenvolvimiento de la patria. Del lector dependerá si el Perú (y el mundo) del futuro seguirá ignorando estos asuntos o si más bien, por fin, podremos problematizar asuntos nuevos y desconocidos. Terminaremos esta parte del libro explicando la razón por la cual debemos discutir estas urgencias morales.

3. Paradoja del quechua en el Perú

En el Perú existen 47 lenguas pertenecientes a los pueblos originarios (MINEDU, 2017). Una de esas es el quechua. Durante mucho tiempo el quechua estuvo asociado a la vergüenza, a lo rural y a lo pobre. Por este motivo, muchos quechuahablantes ocultan su idioma original el cual solamente suelen usar para gastarse bromas entre ellos sin que se den cuenta los niños u otros no quechuahablantes. Esta realidad era producto de la discriminación que sufren aún el hombre y la mujer de los Andes. Es imposible no notar que en las principales noticias se muestran a los delincuentes, las trabajadoras del hogar, las personas que se encargan de la limpieza pública, quienes venden emolientes o los que

trabajan bajo cualquier empleo de mala paga (como ser guachimán) con un rasgo en común: su color cobrizo de piel. Esto ha alentado la estigmatización hacia todo aquello que sea sinónimo de lo andino, lo serrano o lo «cholo». Sobre esto último escribe Quijano:

(...) este sector que los antropólogos y en general la población no-indígena del país denominan «cholo», se desprende de la masa del campesinado indígena y comienza a diferenciarse de ella adoptando o elaborando ciertos elementos que conforman un nuevo estilo de vida, integrado tanto por elementos de procedencia urbano-occidental, como por los que provienen de la cultura indígena contemporánea. (1980, p. 63)

Sin embargo, a pesar de todo esto, hoy se está buscando revalorar el idioma quechua, el cual se está enseñando incluso en centros de idiomas de prestigiosas universidades del país. Este es el mismo quechua que hablan los candidatos presidenciales y los líderes que representan los intereses de los campesinos o los trabajadores del interior del país.

La paradoja es que esto que se está intentando hacer con su idioma no está repercutiendo en las condiciones inmediatas de vida de las mismas personas que hablan quechua como lengua materna. Este es un caso de apropiación cultural, pues ciertos grupos privilegiados están asimilando elementos culturales propios de los grupos marginados. Estamos ante el viejo problema del indio, pero reescrito académicamente con intereses lingüísticos y antropológicos. Se estudia el quechua del hombre andino, pero no se quiere saber nada acerca de cómo ayudarlo a salir de su situación de pobreza, miseria, enfermedad y abandono. (Mora, 2020c)

4. Paradoja de la tolerancia de Popper

Popper (2017) sostuvo que una sociedad que sea tolerante en extremo, podría gestar su propia destrucción. Tolerar significa discordar, pero respetar. Pues bien, si una sociedad discuerda, por ejemplo, de los intolerantes violentos, pero aun así los respeta bajo una distorsionada idea de la tolerancia, dicha sociedad estará en peligro de ser aniquilada por los intolerantes violentos a los cuales no se les puso límites. En ese sentido, Popper manifiesta que lo más recomendable sería no tolerar a los intolerantes violentos, es decir, podemos tolerar cualquier cosa menos a los intolerantes violentos. Formulada así, la paradoja expone su característica contradicción.

Esta paradoja mantiene su vigencia, sobre todo en estos tiempos donde los extremismos políticos están a la orden del día. Por ejemplo, un político de izquierda podría calificar a toda propuesta que le parezca radical como fascista. O también es común escuchar en el Perú que los políticos de derecha denominen como «terrorista» a todo aquello que signifique oponerse a las amplias libertades de las que gozan las empresas en nuestra patria¹³⁵.

Un modo de combatir a los extremistas debería ser mediante la aplicación de lo políticamente correcto, con el objetivo de que midan su lenguaje y así no incurran en agresiones violentas y opresoras. Sin embargo, los medios de comunicación masiva, que últimamente están parcializados a favor o en contra de tal o cual posición política, tampoco

¹³⁵ Y no solo se trata de estos espectros políticos (derecha e izquierda) pues existen más tendencias en juego como, por ejemplo, progresistas, conservadores, libertarios, liberales, etc.

parecen estar interesados en algún tipo de limitación a su accionar bajo una malentendida idea de libertad de expresión. Esto es plenamente controversial.

5. Dilema (o paradoja) del prisionero

Fue propuesta por Merrill Flood (1951) y Melvin Dresher (1950). Un policía captura a dos delincuentes, Alberto y Benito. No puede probar la gravedad de sus delitos, por lo cual solo pagarían un año en prisión. Sin embargo, decide separarlos en salones lejanos y envía a un emisario a cada habitación para que les informe sobre un pacto. Cada emisario, al mismo tiempo, le propone esto a cada delincuente sin que el otro lo sepa.

1. Si Ud. confiesa y su compañero no lo hace, Ud. sale libre, pero su compañero se queda 20 años.
2. Si los dos confiesan, entonces los dos se quedan 5 años.

Tabla 3
Esquema del dilema del prisionero

Alberto \ Benito	Confiesa	Guarda silencio
	Confiesa	Alberto y Benito se quedan 5 años presos
	Guarda silencio	Alberto se queda 20 años preso y Benito sale libre
	Guarda silencio	Alberto y Benito se quedan 1 año presos

Fuente: Elaboración propia

Cada uno de los prisioneros piensa en sus posibilidades. Si uno elige no confesar, pero su compañero sí lo hace, se arriesga a pasar 20 años en prisión. Entonces, cada uno por su cuenta razona que lo más conveniente es confesar y así ambos terminan pagando 5 años por sus delitos. No obstante, si cada uno se hubiera quedado callado y sin confesar, hubieran salido al año de ser arrestados.

Esta paradoja es interesante porque cuestiona el egoísmo que caracteriza los intercambios económicos de la actual sociedad en la que vivimos. Si ambos prisioneros decidieran callar de modo colaborativo para poder librarse de la prisión, ambos estarían en una posición de mayor ventaja. El problema es que si vamos a razonar tenemos que pensar que lo peor podría pasar y ese tema tiene que ver con suponer que el otro nos puede traicionar si nosotros bajamos la guardia y pecamos de ingenuos. A veces hace falta tener la valentía de confiar en los demás para poder desarrollarnos como una sociedad más unida y más solidaria. Pero esta última manera de actuar hoy parece algo lejana. Escribe Clark:

Existen muchas situaciones en las que es beneficioso cooperar, por ejemplo, para reducir la proliferación de armas nucleares, para fomentar el uso del transporte público en lugar del automóvil y para limitar las demandas salariales.

¿Cómo podemos garantizar el acuerdo y la confianza necesarios para lograr la cooperación? En cierta medida, esto se consigue mediante el derecho: nuestro régimen de propiedad está creado y sostenido por la ley, que impone sanciones criminales a los que roban y sanciones civiles a los que incumplen los contratos. Pero el sistema no funcionaría a menos que los funcionarios aceptaran

las normas y estuvieran dispuestos a imponerlas imparcialmente. Además, sin el apoyo de la ciudadanía, la ley solo se podría imponer mediante el terror. La mejor manera de garantizar la cooperación es inculcar y fomentar las actitudes morales, cultivar el fondo de altruismo natural que la mayoría de la gente posee y potenciar mecanismos sociales para que se cumplan los acuerdos y se coopere con justicia. La ley podrá entonces actuar de refuerzo. (...) (Clark, 2009, pp. 211-212)

6. Paradoja del extorsionador

Esta paradoja trata acerca de lo que somos capaces de hacer con tal de sacar la mejor parte y fue difundida por Paenza (2019). Un tipo entra a una casa y les dice a dos amigos que les dará 1000 dólares siempre y cuando decidan la mejor forma de repartirlo. Sin embargo, si no se deciden, entonces se llevará su dinero. Él dice que volverá en una hora a no ser que le avisen que vuelva antes. Ahora bien, en principio, cada uno podría acordar en quedarse con 500 dólares y el asunto quedaría resuelto. Pero, uno podría ser más codicioso y así procedería a explicarle al otro que necesita más dinero porque tiene una emergencia y un problema que resolver. En ese sentido, podría exigir 600 dólares.

Luego, podría alegar que, en realidad, su amigo vive bien y no necesita el dinero, puesto que tiene un trabajo seguro mientras que él está desempleado. Entonces, sube su parte hasta 800 dólares. El otro amigo no se queda conforme y empieza a reclamar, pues no le parece justo solo quedarse con 200 dólares. El tiempo pasa y aún no se ponen de acuerdo. Solo faltan 10 minutos para que vuelva el sujeto de los 1000 dólares. El

otro insiste en que acepte sus 200 dólares porque si no lo hace, entonces vendrá el tipo del dinero y al ver que no hay acuerdo se llevará su efectivo y nadie tendrá una parte del mismo. Esta es una especie de extorsión, pues con tal de obtener mayor ventaja, uno podría amenazar con arruinar a todos. ¿Uds. aceptarían el trato?

Esta situación se asemeja mucho al relato del anillo de Giges planteado en *La República* por Platón (2005). De acuerdo a este relato, un campesino descubre un anillo que lo vuelve invisible.

Entonces, él se da cuenta del tremendo poder que tiene entre manos y decide asesinar al rey para después casarse con la viuda real y así tener el control absoluto del reino. Lo puede hacer, dado que nadie lo podrá culpar por la ventaja que le otorga el uso el anillo. Siendo así, la cuestión central es la siguiente: en un mundo donde se premia a los malos y se castiga a los buenos, ¿hay motivos sólidos para que una persona que pueda cometer cualquier crimen y quedar impune quiera seguir actuando de modo correcto? En el caso antes mencionado, ¿puede tener reparos morales un extorsionador que amenaza con dejar sin dinero a todos, si no se cumplen sus exigencias?, ¿es lógico que siempre busquemos nuestro propio y egoísta beneficio incluso si esto significa que nos perjudiquemos a nosotros mismos y a todo el grupo del que formamos parte? Al parecer un extorsionador ideal sí es capaz de llegar a ese extremo. No obstante, no parece saludable actuar de ese modo, si bien es hasta cierto punto normal que cualquiera busque siempre sacar la máxima ventaja de una situación.

7. Paradoja de Easterlin

Esta paradoja, que trata sobre la relación entre el dinero y la felicidad, fue propuesta por Easterlin (1974). Normalmente, se dice que el dinero no compra la felicidad. Esta idea viene desde Aristóteles (1998) quien afirmó que de nada serviría tener tanto dinero si uno no puede compartirlo con amigos. De ahí que el filósofo afirmase que un ingrediente fundamental de la felicidad es la amistad pues solo en la amistad se considera a la felicidad como un fin último, existe anhelo de perfección, y, además, se trata de un vínculo de excelencia con los demás.

Sin embargo, esto no sería del todo cierto. Realmente, cuando se tiene dinero se experimenta cierta satisfacción a la cual se le podría llamar «felicidad». El asunto es que hay un tope de dinero, por ejemplo, 20.000 dólares en los años 70 del siglo XX (Darriba, 2013)¹³⁶. Después de ese tope, aunque se tenga mucho dinero ya no es posible experimentar

¹³⁶ Estudios más recientes sobre la relación entre ingresos y felicidad han intentado establecer cifras. Por ejemplo, un estudio de 2018 publicado en *Nature Human Behaviour* (“Happiness, income satiation and turning points around the world”) sugiere que el ingreso máximo para la satisfacción general con la vida ronda los \$95,000 al año por persona a nivel global. Para el bienestar emocional diario (sentimientos positivos o ausencia de emociones negativas), el umbral estaría en torno a \$60,000 a \$75,000 al año. Sin embargo, estos valores varían según la región. En América Latina y el Caribe, los ingresos máximos estimados para la satisfacción general se encuentran entre \$35,000 y \$45,000 al año. En países desarrollados como Estados Unidos, estas cifras suelen ser más altas, superando los \$100,000 al año. Estos umbrales reflejan que, después de cierto punto, aumentos en el ingreso tienen un impacto decreciente en la felicidad o incluso pueden generar más estrés y menos bienestar. Si ajustamos estas cifras por inflación y crecimiento económico desde 2018, podríamos estimar que los valores actuales son aproximadamente un 10-15% más altos. Por lo tanto, una estimación razonable sería entre \$77,000 y \$110,000 al año dependiendo del contexto económico y cultural. Centrándonos en América Latina, el rango anual de ingresos de \$38,500 a \$51,750 equivale, de manera mensual, a aproximadamente \$3,208.33 y \$4,312.50, respectivamente. Convertido a soles, considerando un tipo de cambio promedio de 3.80, esto representa entre S/ 12,191.67 y S/ 16,387.50 al mes. Estos valores podrían variar dependiendo de las fluctuaciones del tipo de cambio.

mayor felicidad. Esta paradoja aún es discutida, pues puede ser usada para apoyar ciertas políticas o ciertas recomendaciones financieras.

De hecho, vivimos en una sociedad donde existe la idea de que ser ambicioso o exitoso implica tener cada vez más y más dinero, como si tal tope no existiera. Precisamente esa es la política que favorece al desarrollo y expansión del capitalismo. Afirmar que, llegado a cierto punto, tener más dinero no lo hace a uno más feliz, puede ser interpretado como defensa del socialismo o alguna política semejante como la del Estado de bienestar. Y como hemos planteado anteriormente, vivimos tiempos de extremismos, donde se busca la mínima excusa para atacar a los demás. Esta paradoja aún sigue en discusión.

8. Paradoja del trabajo

Aguirre (25 de octubre del 2017), famoso *youtuber* peruano, analiza una curiosa relación entre el trabajo y la libertad. El trabajo se considera (bajo las condiciones laborales actuales) una forma de esclavitud asolapada y, en consecuencia, es una no libertad. En el trabajo no somos nosotros mismos, sino que estamos produciendo ganancias para otro que nos ha comprado nuestra fuerza laboral.

El trabajo nos deshumaniza, porque no nos permite desarrollarnos como personas que se tratan con respeto y comprensión mutuos. Sin embargo, también es cierto que el trabajo nos permite ganar dinero y gracias a ese dinero podemos esperar a cada fin de semana o al periodo de vacaciones para gastar lo conseguido y hacer lo que nosotros gustemos. Si el dinero nos hace posible la libertad y si con esa libertad podemos consumir aquello que más anhelamos, entonces ocurre una

situación curiosa: la no libertad del trabajador hace posible la libertad del ser humano.

Este análisis ya se encuentra en Marx (1980) y expone de cierto modo la realidad del trabajador que está sometido a unas condiciones laborales deplorables. La libertad humana es un bien preciado. Por eso, el trabajo, en tanto tiempo que le dedicamos a otra cosa para desarrollar proyectos ajenos, anula nuestra capacidad de ser nosotros mismos. Aunque existen buenos trabajos que llenan el espíritu de una gran satisfacción, los trabajos más abundantes son aquellos en los cuales no se reconocen vacaciones al trabajador, ni seguro médico, no permiten ascender, e incluso pagan un salario muy bajo. Esta paradoja debe recordarnos la importancia de luchar por derechos laborales más justos.

9. Paradojas de la paz en el mundo

Desde que el mundo es mundo, la guerra ha sido parte de su sangrienta historia. Ya Heráclito (1963) en el fragmento 53 afirmaba que la guerra es el padre de todas las cosas, e incluso Vegecio (2006) sostenía que, si uno quiere paz, debe prepararse para la guerra. La paz es un concepto complejo, pero contradictorio.

A nivel ontológico, la paz significa falta de ruido o de movimiento. Aunque ciertamente es muy difícil imaginar un mundo sin ruido, ya que ni siquiera en un bosque profundo o en una montaña lejana de la ciudad hay ausencia total de bulla. Sin embargo, a pesar del ruido, es posible alcanzar la paz (es decir, comprender la armonía cósmica) y, de hecho, quienes lo consiguen son considerados virtuosos.

A nivel antropológico, la paz puede significar tranquilidad en el alma humana. Ahora bien, existen muchos factores que obstruyen el conseguir esto último. Por ejemplo, los miedos que nos invaden constantemente, tales como el futuro, el sufrimiento y la muerte. Incluso, el conocimiento, que muchos filósofos admiran y persiguen, puede ser causa de preocupación. Además, hay que considerar que los mejores aportes a la cultura humana han sido propuestas de personas sumamente intranquilas que se esforzaron en demasía. A pesar de todo, es factible concebir que alguien tenga tranquilidad en su interior.

A nivel moral, la paz puede ser entendida como estar en armonía con los otros seres humanos. En este punto, el cristianismo, al menos en Occidente, se suele presentar como una opción cargada de amor. Pero ya Nietzsche (1990) anunció la muerte de Dios y con ello nos enrostró nuestra particular hipocresía, que se puede constatar cuando cualquiera jura por Dios y por la patria y termina actuando en contra de los intereses de las grandes mayorías nacionales. Incluso, esa búsqueda de la paz en un mundo sin Dios ha degenerado en indiferencia hacia el otro, al cual se le ignora tanto, que ni siquiera uno se siente autorizado a meterse en su vida personal cargada de problemas ajenos. No obstante, es recomendable buscar convivir en concordia con los demás para evitar que los males dominen nuestros vínculos sociales.

Finalmente, la paz puede comprenderse como lo opuesto a la guerra, entendiendo esto último como conflicto armado entre dos países. Visto desde una perspectiva humanitaria, la guerra es una desgracia. Sin embargo, desde una perspectiva económica, es una oportunidad para generar ganancias y reorganizar el mapa del poder mundial. Es por este

motivo que las guerras resultan ser mortales, pero al mismo tiempo, muy redituables. Pero, en algún momento se tendrá que comprender lo absurdo de las guerras y lo conveniente de cierta paz para el desarrollo humano.

10. Paradoja del hambre en el mundo

De tantas injusticias, esta, sin dudas, es la más grande e incomprensible. Los campesinos que producen la comida son, precisamente, los que pasan hambre. Según la BBC (16 de octubre del 2019) al respecto de esta paradoja:

Imagina sembrar comida y estar hambriento.

Esa es la paradoja del hambre.

Los trabajadores de la agricultura son un tercio de la población trabajadora del mundo.

Los campesinos producen 80% de la comida en el mundo en desarrollo. A pesar de ello, son los más propensos a sufrir hambre, de acuerdo a datos de la ONU. (...)

Algunos campesinos no pueden pagar por la comida que producen.

En los países en desarrollo, la comida puede costarles hasta el 50% de sus ingresos.

En el mundo, 1 de cada 9 personas no tiene suficiente comida para llevar una vida activa y sana. (...)

En el mundo se produce suficiente comida para alimentar hasta 10.000 millones de personas, cuando hay solo unos 7.500 millones.

¿Qué está pasando con la comida?

Cada año, un tercio de toda la comida se pierde o se desperdicia.

Sobre todo, por los desperdicios de las casas, el mal almacenamiento y el transporte.

Esa comida vale aproximadamente 1 billón de dólares estadounidenses.

Si se recuperara el 25% de la comida que se desperdicia, se podría alimentar a 870 millones de personas con hambre. (...)

La equidad de género es clave para erradicar el hambre.

En todo el mundo, las mujeres son más propensas a sufrir hambre.

Las campesinas generalmente ganan menos y trabajan en peores condiciones.

Habría 150 millones menos de personas con hambre en el mundo si las campesinas tuvieran acceso a los mismos recursos que los hombres. (...)

El cambio climático es una causa importante del hambre en el mundo.

Las temperaturas en aumento y el clima extremo amenazan la agricultura y muchos campesinos sufren una disminución en la calidad de sus cosechas. (BBC, 16 de octubre del 2019, párr. 1-6)

Esta situación ocurre porque los maltratados campesinos de hoy formaban parte de los pueblos marginados del pasado. Además, no se considera como fundamental el derecho a la alimentación. Otra de las razones es que a los campesinos se les paga muy poco para así beneficiar a las grandes empresas alimentarias antes que a los propios seres

humanos. Por esa razón, los mismos agricultores no pueden comprar la comida que ellos se encargan de producir.

Durante la pandemia uno pudo percatarse de que existen trabajos que no son reconocidos del todo, aunque son muy relevantes. Por ejemplo, los que se encargan de la limpieza son fundamentales para mantener la higiene a nivel social. Lo mismo sucede con los repartidores que se trasladan en algún vehículo para cumplir con la entrega de algún bien. Esto pasa precisamente con los campesinos, a quienes no se les reconoce históricamente por su aporte a este mundo. Sin ellos, no habría comida y todo lo demás no tendría sentido. Esta penosa situación, todavía en pleno siglo XXI, es una reivindicación pendiente.

11. Paradoja de la democracia

Popper (2017) analiza una situación política muy llamativa. Dadas ciertas condiciones, una sociedad entera podría elegir democráticamente a un representante político que bajo el pretexto de poner orden moral y controlar la economía del país, quiera instalar una dictadura en beneficio de la población. La idea, en términos generales, es que una democracia podría permitir la elección y el triunfo de una opción no democrática.

Existen casos donde la población podría sentirse representada por un candidato que, a cambio de mejorar las condiciones de vida de toda la sociedad, instale un gobierno que recorte los derechos civiles y políticos, como ocurre hoy en el 2022 en El Salvador¹³⁷. Este es un problema serio

¹³⁷ Actualmente, el presidente Nayib Bukele está tratando de combatir el crimen en su país y se ha ganado el favor de sus admiradores y el odio de sus detractores. Si bien la población parece apoyarlo, entidades internacionales juzgan que está atentando contra los derechos humanos (Amnistía Internacional España, 2 de junio del 2022).

porque se piensa que la oposición política genera inestabilidad y bloquea iniciativas gubernamentales que podrían beneficiar a las personas comunes. Por ejemplo, si para derrotar a la delincuencia un candidato promete instalar toques de queda y limpiar la ciudad de asesinos y criminales, algunas personas podrían considerarlo como una opción a tomar en cuenta. Sin embargo, una vez elegido presidente, este político podría encontrar opositores que deseen bloquear su medida. Esto podría desencadenar una lucha de poderes y, tal vez, el presidente persiga y encarcele a sus opositores. Y si la medida resulta efectiva, la misma población querrá, de cualquier modo, la protección y el favor de este gobernante. No obstante, este gobernante les estaría recortando libertades y eso menoscabaría el sentido de la democracia.

12. Paradoja de la unanimidad

Esta paradoja plantea que no es una buena señal que todos coincidan sobre un mismo asunto. De acuerdo a Weinberg:

Según la antigua ley judía, si todos los jueces declaraban culpable unánimemente a un sospechoso en juicio, el sospechoso era absuelto. Este razonamiento suena contradictorio, pero los legisladores de la época habían notado que un acuerdo unánime a menudo indica la presencia de un error sistémico en el proceso judicial, incluso si la naturaleza exacta del error aún no se ha descubierto. Intuitivamente razonaron que cuando algo parece demasiado bueno para ser verdad, lo más probable es que se haya cometido un error.

(...) [Al respecto] el físico e ingeniero electrónico Derek Abbott (Adelaide), dice:

A menudo se asume que la unanimidad es confiable. Sin embargo, resulta que la probabilidad de que un gran número de personas esté de acuerdo es pequeña, por lo que nuestra confianza en la unanimidad es infundada. Esta «paradoja de la unanimidad» muestra que a menudo estamos mucho menos seguros de lo que pensamos.

Si bien el acuerdo unánime generalizado puede seguir siendo confiable en los casos en los que hay un sesgo nulo o cercano a cero, «los investigadores dicen que esta paradoja surge con más frecuencia de lo que podríamos pensar», proporcionando una serie de ejemplos. Aquí hay uno de las fuerzas del orden:

los investigadores demostraron que incluso un pequeño sesgo puede tener un impacto muy grande en los resultados en general. Específicamente, muestran que cuando solo el 1% de las filas muestran un sesgo hacia un sospechoso en particular, la probabilidad de que los testigos estén en lo correcto comienza a disminuir después de solo tres identificaciones unánimes. Contrariamente a la intuición, si uno de los muchos testigos identificara a un sospechoso diferente, entonces la probabilidad de que los otros testigos estuvieran en lo cierto aumentaría sustancialmente. (Weinberg, 7 de enero del 2016, párr. 1-5)

La variedad debe tener lugar, pues de lo contrario, su ausencia generaría sospechas. El margen de error garantiza que un proceso pueda ser considerado normal. La perfección no existe, pues los seres humanos

tienden a cometer errores. En ese sentido, mientras menos acuerdo exista, más confiable es el juicio humano.

Ocurre algunas situaciones donde no es normal que todo vaya bien. Así, la variedad sería una ventaja. Por ejemplo, si uno toma un examen y observa que existen muchas notas elevadas e incluso veintés, eso podría ser una señal de que se han estado pasando las claves del examen. Lo mismo podemos decir cuando en una elección democrática el candidato es elegido con más del 90% de los votos. Esas situaciones no son normales y son indicativos de posible fraude. No es normal un acuerdo unánime, salvo que el sesgo sea nulo.

13. Paradoja del libertino

Mario está casado con Teresa. Sin embargo, en una ocasión le fue infiel a su mujer con otra persona más joven. Mario, al verse descubierto, le pidió disculpas y ella lo perdonó para mantener unida a la familia. En este caso puede notarse una situación interesante.

Sentirse mal por haber realizado una mala acción (por ejemplo, ser infiel) es algo virtuoso, pues eso es señal de que el agente es una persona que tiene vergüenza ante un acto inmoral cometido por él. Sin embargo, eso plantea la idea de que cometer algo malo no es tan malo, porque después de todo si la persona reconoce que ha actuado mal, se siente culpable y pide disculpas, eso lo habrá convertido en una persona buena o que busca mejorar. Pero esto es un problema, porque los malos actos serían la causa de que uno pueda sentirse bien, siendo una buena persona que reconoce lo trágico de su accionar. Escribe Clark:

Este fenómeno no es exclusivo de los sentimientos morales. Toda introspección sobre un sentimiento tenderá a debilitarlo en la medida en que dicho sentimiento requiera dedicar atención al objeto del sentimiento. Si estoy nervioso por una entrevista que voy a tener, la reflexión sobre mi estado mental puede ayudarme a abstraerme de la entrevista. Si una mujer se pregunta por qué siente tanta envidia del éxito de un compañero de trabajo, deja de pensar exclusivamente en el éxito de su compañero y la envidia tenderá a debilitarse. Ésa es la razón por la que es bueno hablar de nuestros sentimientos si nos llevamos un desengaño o sentimos una gran pena mientras que las personas que están exultantes por el éxito o en el paroxismo del amor no suelen tener muchos deseos de analizar cómo se sienten.

Y esto no ocurre sólo con los sentimientos. Si empiezo a fijarme en la atención que dedico a la conducción, dejo de poner mis cinco sentidos en la carretera y en los peligros asociados. (...) (Clark, 2009, pp. 129-130).

Pedir disculpas es algo bueno. Sentir remordimiento o tener vergüenza es elogiado. Sin embargo, en algún momento uno debe aprender a pensar antes de actuar para no estar siempre pidiendo disculpas. En principio, es importante tomar las precauciones para que podamos tomar buenas decisiones.

Esta paradoja apunta a establecer los límites entre una acción mala y la sensación posterior a la realización de una acción mala. Si no tenemos clara la diferencia, no podríamos aprender de nuestras acciones, es decir, tratar de mejorar en cada ámbito de nuestra vida. Siempre debemos

reflexionar sobre lo que significa nuestra vida al transcurrir el tiempo. Esta vida está compuesta de decisiones que tomamos. Dichas decisiones pueden ser buenas o malas. Solo reflexionando, sopesando puntos a favor y puntos en contra, podremos asumir si una determinada acción fue correcta o no, para así acostumbrarnos a cometer buenas acciones y evitar malas acciones. Como suele decirse, el tiempo es un juez sabio.

14. Paradoja de la suerte moral

El factor de la suerte juega un papel relevante en los problemas morales. Imaginemos que un artista experto en lanzar cuchillos, practica su técnica frente a una pared de madera. Él no ha asegurado su puerta, pues cree que está solo y, en consecuencia, nadie entrará a verlo. Así, comienza a tirar varios cuchillos y de repente, entra un niño corriendo justamente cuando él ha lanzado su último cuchillo. El niño solo es rozado por el cuchillo que ni siquiera termina cortándole uno de sus cabellos. La pregunta desconcertante en este caso es: ¿qué clase de responsabilidad tiene el artista de los cuchillos? Por un lado, si el niño hubiera sido herido, sería responsable y luego, sería acusado por todos. Por otro lado, dado que (por suerte) el cuchillo no causó daño al niño, solo podemos recomendarle al artista que tenga más cuidado para la próxima vez. Esto indica que, en realidad, el contexto es el que permite apreciar con mayor nitidez la moralidad o no de un acto. Pero, si esto es así, entonces la ética, más que depender de cosas controlables, como la consciencia y las intenciones, dependería de aspectos no controlables, como la suerte y otras condiciones externas (Nagel, 2000).

Como siempre, el punto medio es la opción a tomar en cuenta para no caer en extremos. Es cierto que existen circunstancias que pueden variar enormemente los resultados de nuestras acciones. Por ejemplo, un borrachín podría parecernos gracioso y simpático en una fiesta, pero indeseable y grotesco como presidente de algún país. En parte, el contexto define nuestras acciones y en parte, nosotros también somos responsables por las decisiones que tomamos. Por eso sirve estudiar ética o algún otro curso de filosofía moral. La idea es tratar de volvernos prudentes, pacientes y virtuosos. No se aprende ética para solo saber acerca de conceptos morales. Se trata de procurar ser buenos.

15. Paradoja de la votación

Es muy sabido que en las elecciones presidenciales, por ejemplo, los candidatos ganan o pierden por márgenes que representan miles y miles de votos. Sin embargo, cuando a uno lo intentan persuadir para que vote, se suele argumentar que un solo voto hace la diferencia y que nuestro único voto cuenta. (Clark, 2009)

El tema es interesante y se vincula con la estadística y la teoría de juegos. Ciertamente, la siguiente pregunta es inquietante, ¿cómo es posible que nuestro voto cuente si, en realidad, un solo voto no hace la diferencia? El asunto es que por sí solo el único voto no hará gran cosa, sin embargo, si consideramos que el asunto tiene que ver con que el mensaje sea masivo y logre llegar a una gran cantidad de personas, entonces sí que nuestro único voto cuenta. En pocas palabras, si, por ejemplo, millones de millones de personas dicen: «Mis acciones no van a

cambiar nada», efectivamente, nada cambiará porque los irresponsables son demasiados y ni siquiera se dan cuenta de que lo son.

Pero no solo es una cuestión de números. Los ciudadanos deberían tener una mejor educación cívica y entender que tienen un deber importante para poder decidir acerca del futuro del país o de sus regiones. No solo se trata de un número, sino de la consciencia de realizar un acto de responsabilidad y así, participar en los procesos democráticos. Escribe Clark:

Con el voto se espera que expresemos nuestras preferencias políticas y esto puede considerarse beneficioso independientemente de las consecuencias electorales de votar. Las repercusiones morales del voto son evidentes, de manera negativa, en el caso de alguien que vota a un partido neonazi. Pero el hecho de votar no será una expresión sincera de nuestras ideas políticas a menos que tengamos preferencias políticas y, en tal caso, es probable que las expresemos también de otras maneras. Sin embargo, si nuestras preferencias estuvieran muy definidas, sería extraño no ejercer el derecho a voto. (...)

¿Y si no nos interesa nada la política? Supongamos que somos artistas, estamos abstraídos en nuestra labor y lo que producimos no está relacionado con la política. A menos que percibamos el peligro de una apatía generalizada o se esté decidiendo un tema clave, podría ser aceptable que no nos molestásemos en votar. Por lo general, es preferible que voten los que están interesados e informados —siempre que su motivación sea recta— en lugar de los ignorantes y no interesados. (Clark, 2009, p 246)

El Perú sigue siendo un país donde el no votar es sancionado con una multa económica. Sin embargo, en algún momento esto podría cambiar y el voto podría volverse facultativo. Hay que estar preparados para que las escuelas, el Estado y los medios de comunicación formen adecuadamente a los futuros ciudadanos y así se logre mejorar la democracia en nuestra patria. La indiferencia política es peligrosa. El precio a pagar por ser indiferentes podría ser muy alto, pues nos podría tocar ser gobernados por las personas menos indicadas.

16. Paradoja de la educación y el trabajo

El sistema educativo está en crisis desde hace mucho tiempo en el país. No obstante, la oferta laboral está aumentando, aunque no se están ofreciendo trabajos que puedan satisfacer totalmente las necesidades de las familias. Siendo así, se está generando una brecha entre la educación y el trabajo, entre la escuela y la empresa.

Por lo común, se asume que uno asiste a un centro educativo a formarse, a tener sentido crítico, a exigir condiciones de vida digna, a buscar la verdad, a cuestionar aquello que a uno le parece mal, en pocas palabras, a mejorar el mundo. Sin embargo, para poder obtener un trabajo es preciso deshacerse de todo eso. En un trabajo al jefe no se le cuestiona. Solo se le obedece.

Si este es el panorama, ¿debería la educación dedicarse a formar herramientas útiles vivientes antes que seres humanos? De hecho, en algunas universidades ni siquiera se contempla la enseñanza de las humanidades como parte del currículo. Muchos se preguntan, ¿para qué me sirve aprender filosofía o los poemas de Neruda? La respuesta es que

no sirve para algo específico, sino que todo lo demás cobra su valor por las mismas humanidades.

Es gracias a esas humanidades que podemos soñar con utopías donde desaparezca la injusticia. La filosofía te permite percatarte de las telarañas en las que quiere envolverte la tecnología para mantenerte domesticado y sosegado. La lectura te entrena en el arte de descifrar códigos, de desatar el potencial de toda tu imaginación y también te permite dialogar con eminencias que ya no están presentes físicamente, pero cuyas ideas aún no han sido del todo exploradas.

La educación, en general, debería ayudarnos a retener nuestros impulsos animales violentos para volvernos civilizados, pero no sumisos, sino libres y sin miedo. Pero, aún hay mucha gente que cree que el dinero vale más que cualquier cosa y prefiere «cuidar» su puesto laboral antes que buscar un cambio real y verdadero. (Mora, 2018)

17. ¿Por qué debemos discutir estas urgencias morales?

Su mismo nombre lo dice. Se tratan de urgencias, aunque del tipo moral. Lo urgente es algo que necesita ser visto con anticipación o con prioridad. En este momento, el Perú necesita personas con valores, con convicciones adecuadas acerca de la distinción entre lo bueno y lo malo.

Esta es una época donde todo se acelera. Existen refrescos y sopas instantáneas, cajeros automáticos para entregar dinero inmediatamente, trenes bala que llegan a 320 km/h, aplicaciones para incrementar la velocidad de los videos de *Internet* y bandas gástricas para bajar velozmente de peso. Hasta la comida tiene que ser rápida, aunque su nivel nutritivo no sea el mejor. Detenerse a pensar, a reflexionar, a

sopesar los puntos de vista, es algo que va en contra de las exigencias del mundo en la actualidad.

Quizá esta sea una de las razones por las cuales las personas no están ni enteradas de estas paradojas morales. A diferencia de las otras, no es necesario saber alguna particular teoría científica para comprenderlas. Solo se necesita interés y, además, un sentido desarrollado de la compasión para poder uno involucrarse en estos problemas.

Recordemos las anteriores paradojas. 1. Está sucediendo algo extraño con el quechua y las personas no han notado esa peculiaridad. Se ama y se odia al que habla quechua en estos mismos momentos. 2. La tolerancia puede pasar de ser una virtud, a convertirse en un riesgo si se tolera a gente equivocada y dispuesta a todo con tal de probar su punto. 3. El trabajo nos está costando más de lo que estamos dispuestos a aceptar. Estamos aprendiendo a vender nuestra libertad por unos centavos. 4. La paz está llena de paradojas. Existe y no existe la posibilidad de anular todos los ruidos. A pesar de ser difícil de conseguir, es recomendable buscar la pacífica tranquilidad mental, sin embargo, la intranquilidad a veces va de la mano con la creatividad. Podemos llevarnos bien con los demás, no obstante, también podemos aprender a mantenernos alejados de sus vidas de los demás y esto último podría ser visto como algo pacífico, pero también como una señal de indiferencia. Finalmente, la paz genera poco dinero en comparación con la guerra y ese asunto sí que es peligroso, pues estamos posiblemente a punto de vivir una Tercera Guerra Mundial sin que nadie, al parecer, pueda evitarlo. 5. El mundo puede saciar su hambre todos los días, pero

precisamente el grupo humano encargado de la producción de los alimentos, es decir, los campesinos son los que más hambre pasan. 6. La democracia puede llevar a una situación en la cual se desee la anulación de la democracia. 7. Si en un proceso se observa que todos están de acuerdo en algo esto puede ser motivo para desconfiar de dicho proceso, por ende, la unanimidad no siempre es buena señal. 8. Una persona puede sentirse mal por realizar un acto inmoral y, sin embargo, también puede sentirse bien porque el hecho de «sentirse mal» es una señal de que aún tiene remordimiento o cargo de consciencia y aquello indica que «le duele» actuar de modo inmoral. 9. Es cierto que debemos esforzarnos por ser personas correctas y ejemplares, no obstante, también es verdad que las circunstancias (o el contexto) pueden convertir nuestras acciones en malas o buenas a pesar de nuestras intenciones. 10. Se tiene que votar porque es un deber ciudadano, pero también es verdad que nuestro único voto es insignificante porque, por lo general, los candidatos suelen ganar por un margen de miles de votos. 11. En los centros educativos nos enseñan a ser críticos con la sociedad, las costumbres, las empresas, los políticos etc., sin embargo, cuando llega el momento de aplicar lo aprendido en el mundo laboral uno se percató que las empresas solo piden obediencia y más bien despiden a cualquiera que critique a la misma empresa.

Estas paradojas son urgencias morales cuyos temas son problemas sociales como la tolerancia, el trabajo, la paz, el hambre, la democracia o la misma educación. En ese sentido, estamos capacitados para poder discutirlos. El asunto es si queremos debatirlas y, además, si el Estado, la

sociedad y las empresas están interesados en que se conversen sobre estas cuestiones.

CUESTIONARIO # 10

1. ¿Qué problema plantea la paradoja de la tolerancia de Popper?

- a) El conflicto entre democracia y tiranía.
- b) La aceptación de todas las ideologías.
- c) La contradicción entre ética y lógica.

2. ¿Qué problemas tiene actualmente el peruano?

- a) Falta dinero para la compra de alimentos y otros.
- b) Seguridad en cualquier calle a cualquier hora.
- c) Moderado precio de los servicios básicos.

3. ¿Qué plaga no es señalada por Marco Aurelio Denegri?

- a) Aumento de la inteligencia.
- b) Terrorismo.
- c) Superpoblación.

4. ¿Qué dilema moral se aborda en la paradoja del prisionero?

- a) Beneficios individuales frente al bien común.
- b) Contradicciones en el sistema judicial.
- c) Dependencia de estrategias colectivas.

5. ¿Qué paradoja destaca el peligro de que las mayorías opten por elegir un gobierno tiránico?

- a) Paradoja del hambre.
- b) Paradoja de la democracia.
- c) Paradoja de la educación y el trabajo.

6. ¿Qué paradoja moral plantea que los que producen los alimentos no pueden acceder a los mismos?

- a) Paradoja del hambre en el mundo.
- b) Paradoja del extorsionador.
- c) Paradoja del libertino.

7. ¿Qué enseña la paradoja de la suerte moral?

- a) Hay poco realmente bajo nuestro control.
- b) Existen falacias en razonamiento moral
- c) El comunismo es una realidad inminente.

8. ¿Qué paradoja sostiene que uno puede sentirse bien a causa de realizar una mala acción?

- a) Paradoja de la democracia.
- b) Paradojas del libertino.
- c) Paradoja del extorsionador.

9. ¿Qué paradoja afirma que uno con tal de salirse con la suya es capaz de amenazar con perjudicar a todos?

- a) de la unanimidad.
- b) del extorsionador.
- c) de la suerte moral.

10. ¿Qué paradoja afirma que el dinero sí compra la felicidad, pero hay un límite?

- a) Paradoja de la unanimidad
- b) Paradoja del hambre
- c) Paradoja de Easterlin

Solucionario: 1b, 2a, 3a, 4a, 5b, 6a, 7a, 8b, 9b, 10c.

Bibliografía de la Obra

- Abbagnano, Nicola. (1994) *Historia de la Filosofía*. Vol. 1, 4ta ed., Barcelona: Hora S. A.
- Agazzi, Evandro (1978). *Filosofía de la física*. Barcelona: Herder.
- Aguirre, José. [Monitor Fantasma]. (25 de octubre del 2017). La paradoja del trabajo (Paradoja de don Ramón). [Video]. *YouTube*. https://www.youtube.com/watch?v=v2Sf4rKs3AI&ab_channel=Monitorfantasma
- Ahualli, Martín. (2003). *Minimalismo, verdad y normatividad*. Buenos Aires. manuscrito inédito. www.accionfilosofica.com/misc/1124412055art.doc
- Alarcón La Torre, E. (2023, 26 de mayo). *La importancia del quechua en el Día de las Lenguas Originarias del Perú*. PuntoEdu. <https://goo.su/Yp2p>
- Alfaya, José. (28 de enero del 2021). Si todo es joya, nada es joya. *925lab*. <https://www.925lab.com/si-todo-es-joya-nada-es-joya/>
- Allen, John. (1993). *Mas allá de los números. Meditaciones de un matemático*. Barcelona: Tusquets.
- Almache, Juan. (2013). Lógica clásica y lógica difusa: Facetas que las caracterizan. *Estoa* Vol. 2, N°. 2. 91-101.
- Alonso, Enrique (2019). ¿Qué lógica necesita saber un filósofo?. *Andamios* Vol. 16, 143-163.
- Alvarado, Carlos. (2005). *Epistemología*. Lima: Mantaro
- Amnistía Internacional España. (2 de junio del 2022). El Salvador: El presidente Bukele sumerge al país en una crisis de derechos humanos después de tres años de gobierno. *Amnistía Internacional España*. <https://acortar.link/Xp5Mcz>
- Anderson, Alan Ross y Belnap, Nuel. (1975). *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Princeton: Princeton University Press,
- Anselmo. (1998). *Proslogion*. Madrid: Tecnos.

- Apple, Michael (1997). Comiendo papas fritas baratas. En P. Gentili (Comp.), *Cultura, política y currículo: Ensayos sobre la crisis de la escuela pública* (47-55). Buenos Aires: Losada.
- Åqvist, Lennart. (1967). Good Samaritans, Contrary-to-Duty Imperatives, and Epistemic Obligations. *Noûs* 1, (4), 361-379.
- Arévalo, Víctor. (2018). *El examen de admisión a la Universidad Nacional de Ingeniería*. (Tesis de Maestría). Universidad Peruana Cayetano Heredia (UPCH), Lima.
- Arieta, Federico. (1995). La lógica y su relación con el quehacer filosófico. Entrevista con Raymundo Morado. *Ergo, Nueva Época*, N°1, 69-84.
- Aristóteles (1988). *Tratados de Lógica (Organon) I. Categorías. Tópicos. Sobre las refutaciones sofísticas*. Madrid: Gredos.
- Aristóteles (1994). *Metafísica*. Madrid: Gredos.
- Aristóteles (1995). *Tratados de Lógica (Organon) II. Sobre la interpretación. Analíticos Primeros. Analíticos Segundos*. Madrid: Gredos.
- Aristóteles. (1998). *Ética Nicomáquea, Ética Eudemia*. Madrid: Gredos.
- Artosi, Alberto; Pieri, Bernardo y Sartor, Giovanni (2013) *Leibniz: Logico-Philosophical Puzzles in the Law. Philosophical Questions and Perplexing Cases in the Law*. Heidelberg: Springer.
- Asociación Fondo de investigadores y editores. (2007). *Compendio académico de Psicología, Filosofía y Lógica*. Lima: Lumbreras
- Bacon, Andrew. (2011). Curry's paradox and ω -inconsistency. *Studia Logica*, February, Vol. 101, Issue 1, pp 1-9.
- Banach, Stefan y Tarski, Alfred. (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6 , 244-277
- Bär, Nora. (9 de octubre del 2012). "El premio Nobel de Física y su paso por Buenos Aires". *La Nación*. <http://www.lanacion.com.ar/1515708-el-premio-nobel-de-fisica-y-su-paso-por-buenos-aires>
- Barbalho, Pedro. (2021). Frege's Concept of Natural Numbers. *Medium*. <https://www.cantorsparadise.com/freges-concept-of-natural-numbers-1e8e70a23a67>

- Barnes, Jonathan (1992) *Los presocráticos*. Madrid: Cátedra.
- Barrero, Tomás y Carnielli, Walter (2005). Tableaux sin refutación. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. XIII, N°. 2, 81-99.
<https://www.redalyc.org/pdf/468/46800207.pdf>
- Barrio, Eduardo. (1998). *La verdad desestructurada*. Buenos Aires: Eudeba.
- Barrio, Eduardo. (dir.) (2014) *La lógica de la verdad*. Buenos Aires: Eudeba.
- Bartolo, Luis. (2020). La contrastación de teorías inconsistentes no triviales. [Tesis de Maestría, UNMSM]. Cybertesis.
<https://philpapers.org/archive/ALELCD-4.pdf>
- BBC News Mundo. (2019, 25 de marzo). *AMLO solicita por carta al rey de España y al Papa que pidan perdón por la Conquista de México*. BBC News Mundo. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-america-latina-47701387>
- BBC News Mundo. (2019, octubre 16). *Día mundial de la alimentación: ¿por qué quienes producen comida son los que más hambre padecen?* BBC News Mundo.
<https://www.bbc.com/mundo/noticias-50064563>
- BBC. (16 de octubre del 2019). Día mundial de la alimentación: ¿por qué quienes producen comida son los que más hambre padecen? *BBC Mundo*. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-50064563>
- Beall, JC, Brady, Ross, Hazen, A., Priest, Graham. y Restall, Greg (2006). Relevant Restricted Quantification. *Journal of Philosophical Logic*, 35, 587-598.
- Beall, JC y Murzi, Julien (2013). Two Flavors of Curry's Paradox. *Journal of Philosophy*, 110 (3), 143-165.
- Beall, JC y Shapiro, Lionel. (2018). Curry's Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en:
<https://plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/>
- Benjamin, Walter. (1973). Tesis de filosofía de la historia. En W. Benjamin, *Discursos interrumpidos I* (págs. 177-191). Madrid: Taurus Ediciones S.A.

- Beorlegui, Carlos. (2004). *Historia del pensamiento filosófico latinoamericano. Una búsqueda incesante de la identidad*. Bilbao: Universidad de Deusto
- Bernardino-Costa, Joaze; Maldonado-Torres, Nelson; Grosfoguel, Ramón (orgs). (2018). *Decoloniality and afro-diasporic thinking*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Beth, Evert (1975). *Las paradojas de la lógica*. Valencia: Universidad de Valencia
- Bieberach, Carlos. (1971) *Introducción a la filosofía y lógica práctica*. Lima: Editorial Universo S. A.
- Birkhoff, Garrett y John Von Neumann. (1936). The Logic of Quantum Mechanics. *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 37, No. 4. (Oct., 1936), 823-843.
- Blackburn, S. (2006) *La verdad. Guía de perplejos*. Barcelona: Crítica.
- Blánquez Fraile, Agustín. (1985) *Diccionario Latino-Español*. Barcelona: Editorial Ramón Sopena S. A.
- Blasco, Pedro y Chico Pedro. (s.f.) *Filosofía y Lógica*. Lima: Editorial Bruño.
- Bobenrieth, Andrés. (1996). *Inconsistencias ¿por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores.
- Bocheński, Józef Maria (1985). *Historia de la lógica formal*. Madrid: Gredos.
- Boole, George. (1847), *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge: Macmillan.
- Bordes, Montserrat. (2011). *Las trampas de Circe: Falacias lógicas y argumentación informal*. Madrid: Cátedra.
- Borges, Jorge Luis. (1966) *Discusión*. Buenos Aires: EMECÉ.
- Boyallian, Nancy (2008) “La paradoja del Montón” en XIV Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas. 2 y 3 de octubre de 2008, en la UBA
- Bretel, Luis (s.f.) *Filosofía y lógica*. Lima: Bruño y Centro de Proyección Cristiana.
- Bunge, Mario (1978). *Filosofía de la física*. Barcelona: Ariel.

- Bunge, Mario. (2007). *Diccionario de Filosofía*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Bustamante, Guillermo. (2008). Los tres principios de la lógica aristotélica: ¿son del mundo o del hablar? *Folios*. Segunda Época, N° 27, 24-30. <http://www.scielo.org.co/pdf/folios/n27/n27a03.pdf>
- Cabanzo, Alfonso. (2009). *La enseñanza de la lógica y análisis del texto argumentativo*. Revista Actualidades Pedagógicas N.° 54, 159-172.
- Cabello, Adán (1997). Física cuántica: Los experimentos no realizados no tienen resultados. *Temas, Investigación y Ciencia*, N° 10, 65-67.
- Cabello, Adán (2000). Introducción a la lógica cuántica. *Arbor*, CLXVII, 659-660, 489-507.
- Canals, Sergio. (2016). *Si todo es bullying, nada es bullying*. Santiago: Uqbar.
- Cantor, Georg. (2011). Fundamentos de la teoría de los números transfinitos. S. Hawking (ed.), *Dios creó los números*, Barcelona: Crítica, 835-908.
- Carnap, Rudolf. (1993). “La superación de la metafísica mediante el análisis lógico del lenguaje”. En Ayer, Alfred. *El positivismo lógico*. FCE, 66-87. <https://filosevilla2012.files.wordpress.com/2014/07/carnap-1932-la-superacion-de-la-metafisica.pdf>
- Carrara, Massimiliano y Martino, Enrico (2011). Curry's Paradox. A new Argument for Trivialism. *Logic and Philosophy of Science*. Vol. IX, N° 1, 2011, 199-206.
- Carrera, Luis. (2016). ¿Es la lógica una disciplina filosófica o científica? *Perspectivas*. Vol. 13 Núm. 12, 12-19.
- Carrión, Roque. (1995). Juan Bautista Ferro o la cotidianidad del filosofar. Fragmentos de un testimonio. *Areté*, VII, N° 2, 209-226.
- Carta de la transdisciplinariedad. (6 de noviembre de 1994) Convento de Arrábida. Disponible en: <http://www.filosofia.org/cod/c1994tra.htm> [Consultado: 5 de enero de 2025]
- Cassini, Alejandro. (2006). *El juego de los principios. Una introducción al método axiomático*. Buenos Aires: A.Z Editora.

- Castro, Atilio y Dávila, Dante. (1995). Juan Bautista Ferro: Nota bibliográfica. *Areté*, VII, N° 2, 385-387.
- Cervantes Saavedra, Miguel de. (1995) *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*. Madrid: Ed. Cátedra
- Chávez Noriega, Alejandro. (2000) *Introducción a la lógica*. Lima: Imprenta Noriega.
- Chisholm, Roderick (1982). *Teoría del conocimiento*. Madrid: Tecnos.
- Cicerón, Marco Tulio (2000). *Las paradojas de los estoicos*. México: UNAM.
- Clark, Michael. (2009). *El gran libro de las paradojas*. Madrid: Gredos.
- Clemente de la Torre, Alberto (2000). *Física cuántica para filósofos*. México: FCE.
- Cobley, Paul y Jansz, Litza (2001). *Semiótica para principiantes*. Buenos Aires: Era Naciente SRL
- Cook, Roy (2013). *Paradoxes*. Cambridge: Polity.
- Copi, Irving y Carl Cohen (2009). *Introducción a la lógica*. México: LIMUSA.
- Copi, Irving. (2001). *Lógica simbólica*. México: CECSA.
- Cuellar, Ladislao. (2006). *Las Dos Grandes Vertientes del Filosofar Latinoamericano*. Lima: UNMSM
- Curry, Haskell. (1942), The inconsistency of certain formal logics. *Journal of Symbolic Logic* 7, 115-117.
- Cusa, Nicolás de (1984). *La Docta Ignorancia*. Buenos Aires: Orbis.
- Da Costa, Newton y Renato Lewin (1995). *Lógica Paraconsistente*. *Lógica* Carlos Alchourrón (Ed.), Madrid: Trotta, 185-204.
- Da Costa, Newton. (2000). *Lógica inductiva y probabilidad*. Lima: UL y FCE.
- Dancy, Jonathan y Sosa, Ernest (comp.) (1992). *A Companion to Epistemology*. Massachussets: Blackwell.
- Daniels, Greg, Gervais, Ricky y Merchant, Stephen (Productores). (2005-2013). *The Office* [serie de televisión]. EEUU: Universal Television; Reville Productions; Deedle-Dee Productions.

- Darriba, Sabela. (2013). *Economía y felicidad: la paradoja de Easterlin en Galicia*. [Trabajo fin de grado, UDC] <http://hdl.handle.net/2183/10104>
- Davidson, Donald. (2001). *Inquiries into Truth and Interpretation*. 2da ed., Nueva York: Oxford University Press.
- Denegri, Marco. (2 de julio del 2017). La autodestrucción humana y las siete plagas, por Marco Aurelio Denegri. *El Comercio*. <https://elcomercio.pe/luces/libros/autodestruccion-humana-y-siete-plagas-marco-aurelio-denegri-439183-noticia/>
- Díez Martínez, Amparo. (2013). *Introducción a la filosofía de la lógica*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- DineroEnElTiempo (2022). Valor actual del dólar de 1970. *DineroEnElTiempo*. Recuperado el 16 de julio del 2022. <https://www.dineroeneltiempo.com/dolar/de-1970-a-valor-presente>
- Diógenes Laercio. (1985) *Vidas, opiniones y sentencias de los Filósofos más ilustres*. Barcelona: Ed. Teorema.
- Dresher, Merrill. (1950). Methods of solution in game theory. *Econometrica*, Vol.18, 179-181.
- Dussel, Enrique. (1995) *The Invention of the Americas: Eclipse Of "The Other" And the Myth of Modernity*. Trans. Michael Barber. New York: Continuum.
- Easterlin, Richard. (1974). Does economic growth improve the human lot? Some empirical evidence. P. A. David y M. W. Rederer (Eds.), *Nations and households in economic growth: Essays in honor of Moses Abramowitz*. Nueva York: Academic Press.
- Echave, Delia, Urquijo, María y Ricardo Guibourg. (2008). *Lógica, proposición y norma*. Buenos Aires: Astrea.
- Einstein, Albert. (1911). Die Relativitäts-Theorie. *Naturforschende Gesellschaft, Zürich, Vierteljahresschrift*. 56, 1–14.
- El Popular. (17 de julio del 2019). Listo para el penal. [Portada]. *El Popular*. <https://www.facebook.com/FujiNewsPeru/photos/a.1506552759583347/2193834620855154/>

- Fanon, Frantz (1968) *Black Skin, White Masks*. Trans. Charles Lam Markmann. New York: Grove Press.
- Fernández Moreno, Luis. (1993). Neutralidad temática y la delimitación de las constantes lógicas en Carnap, Tarski y Quine. *Contextos*. 59-75.
- Ferrater Mora, José y Hughes Leblanc. (1992). *Lógica Matemática*. México: FCE.
- Ferrater Mora, José. (1960). *¿Qué es la lógica?* Buenos Aires: Columba.
- Ferrater Mora, José. (1994) *Diccionario de Filosofía*. T. I-IV. Barcelona: Ariel.
- Ferro, Juan. (1966). *Procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado*. [Tesis de Doctorado, UNMSM] <https://repositorio.unmsm.edu.pe/handle/UNMSM/1895>
- Ferro, Juan. (1978) Popper. La lógica del descubrimiento científico. *La Filosofía Alemana desde Nicolás de Cusa hasta nuestros días*. Sobrevilla, D. (edit.). Lima: UPCH, 367-384.
- Ferro, Juan. (1995). *Enseñar Filosofía*. Reimpreso en: *Cuadernos de Filosofía*. UNMSM, 9-14.
- Field, Hartry. (2008). *Saving Truth from paradox*. Oxford: Oxford University Press.
- Fierro, Alfredo. (1993). La crítica filosófica de la religión. *Religión*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Madrid: Trotta, 179-194.
- Flood, Melvin. (1951). A preference experiment. *The Rand Corporation Memory*, Santa Mónica, 256.
- Foot, Philippa. (1967). The problem of abortion and the doctrine of the double effect. *Oxford Review*, vol. 5, 5-15.
- Foukzon, Jaykov (2015). Relevant first-order logic LP# and Curry's paradox. *Pure and Applied Mathematics Journal. Special Issue: Modern Combinatorial Set Theory and Large Cardinal Properties*. Vol. 4, No. 1-1, 2015, 6-12.
- Franceschi, Paul. (2002). *On the Impossibility of Successful Ontological Arguments*. Disponible en: <http://cogprints.org/2492/1/ontarg-en.pdf>

- Frápolti, María. (2019). Condicionales y cuantificadores. ¿Qué enseñamos cuando enseñamos lógica? Hernández, G., Casales, R. y Castro, J. (Eds.), *Lógica, argumentación y pensamiento crítico*. (43-62) México, Puebla: UPAEP.
- Frapolti, María y Romero, Esther. (1998). *Una aproximación a la filosofía del lenguaje*. Madrid: Síntesis
- Frege, Gottlob. (1972). *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos*. México: UNAM.
- Frege, Gottlob. (1973). *Los fundamentos de la Aritmética*. Barcelona: Laia.
- Frege, Gottlob. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- Frege, Gottlob. (1892). Sobre sentido y referencia. *La búsqueda del significado*. Luis M. Valdés Villanueva (comp.) 2000, Madrid: Tecnos, 27-48.
- Freire, Paulo. (1985). *Pedagogía del oprimido*. México: Siglo XXI Editores.
- Gamarra Gómez, Severo. (2004) *Lógica jurídica: principio de razón suficiente*. Lima: Fondo Editorial UNMSM.
- Gamarra, Severo (2003). *Aplicación del principio de razón suficiente en la carga de la prueba a base de la lógica jurídica de Mariano Iberico Rodríguez*. [Tesis de Maestría, UNMSM]
- Gamut, L.T.F. (2006) *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Eudeba.
- García Damborenea, Ricardo. (2000) *Uso de razón. Diccionario de falacias*. Madrid: Biblioteca Nueva.
- García Suárez, Alfonso. (2011). *Modos de significar. Una introducción temática a la filosofía del lenguaje*. 2da ed., Madrid: Tecnos.
- García Villarán, Antonio. (2019). *El arte de no tener talento. Revolución Hamparte*. Madrid: Ediciones Martínez Roca
- García, Óscar. (1999). *El método de análisis filosófico de Carnap: Una evaluación crítica*. [Tesis de Bachillerato, UNMSM].
- García Zárate, Óscar. (2007) *Lógica*. Lima: CEPREDIM.
- García Zárate, Óscar. (2011). La teoría mínima de la verdad. *Cultura, Revista de la Asociación de Docentes de la Universidad de San Martín de Porres*, N° 25, 2011, 253-268.

- García Zárate, Óscar. (2012a). Consideraciones previas a una teoría de la verdad. *Ciencia, verdad y filosofía*, Lima: CEPREDIM, 2012, 69-90.
- García Zárate, Óscar. (2012b). La concepción semántica de la verdad: un examen crítico. *Ciencia, verdad y filosofía*. Lima, CEPREDIM, 2012, 147-174.
- García Zárate, Óscar. (2012c). *Elementos de Lógica*. Lima: Visual Press.
- García Zárate, Óscar. (2014). *Teoría del conocimiento*. Lima: Gráfica Bracamonte.
- García Zárate, Óscar. y Palacios, Ronald. (1998). *Lógica matemática como disciplina curricular*. Lima: Artes Impresos.
- García, Sixto y Rosales Diógenes. (1984) *Filosofía y Lógica*. Lima: Amaru Editores S. A. y Editorial Mantaro.
- Gardies, Jean-Louis. (1979). *Lógica del tiempo*. Madrid: Paraninfo.
- Garduño, Ana. (28 de abril del 2014). Si es todo, es nada (El dilema del arte). *Jóvenesconstruyendo*.
<https://blogjovenesconstruyendo.wordpress.com/2014/04/28/si-es-todo-es-nada-el-dilema-del-arte/>
- Garduño, Felipe (2000). Los exámenes de admisión y la selección a la universidad pública ¿razón pedagógica o racionalidad técnica? *Revista del Centro de Investigación Universidad La Salle*, 4(14), 11-18.
- Gestión. (11 de diciembre del 2017). Pulso Perú: ¿Cuáles son los 14 principales problemas de los peruanos? *Gestión*.
<https://gestion.pe/peru/politica/pulso-peru-son-14-principales-problemas-peruanos-222453-noticia/>
- Gianella de Salama, Alicia. (1975). *Lógica simbólica y elementos de metodología de la ciencia*. Buenos Aires: El Ateneo.
- Gildomero, Luis y García Zárate, Óscar. (1984). *Filosofía y lógica*. Lima: Grafotécnica.
- Giusti, Miguel. (ed.) (2000) *La Filosofía del siglo XX: Balance y Perspectivas. Actas del VII Congreso Nacional de Filosofía*. Lima: Fondo Editorial de la PUCP.

- Gödel, Kurt. (1990). *Collected Works*. Tomo II, Oxford: Oxford University Press.
- Godement, Roger. (1967). *Álgebra*. Madrid: Tecnos.
- Goldstein, Laurence. (1986). Epimenides and Curry. *Analysis*, 463, 117-121.
- Goldstein, Laurence, Brennan, Andrew, Deutsch, Max, Lau, Joe. (2008). *Lógica, conceptos clave en filosofía*. Valencia: Universitat de València.
- Gómez Torrente, Mario (2007). Constantes lógicas. *Filosofía de la lógica*. María José Frápolli Sanz (Coord.) Madrid: Tecnos, 179-206.
- Gómez Torrente, Mario. (2000). *Forma y Modalidad. Una introducción al concepto de consecuencia lógica*. Buenos Aires: Eudeba
- Gonseth, Ferdinand. (1936). *Les mathématiques et la réalité: Essai sur la méthode axiomatique*. Paris: Albert Blanchard.
- Gonzales, Sharún. (6 de julio del 2016). El contexto europeo explicado en 12 puntos por Farid Kahhat. *PuntoEdu*. PUCP. <https://puntoedu.pucp.edu.pe/noticia/el-contexto-europeo-explicado-en-12-puntos/>
- Goodman, Nelson (1955). *Realidad, ficción y previsión*. Cambridge: Harvard
- Grelling, Kurt y Nelson, Leonard. (1907). Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. *Abhandlungen der Fries'schen Schule (Neue Serie)* 2, 300-334.
- Grelling, Kurt. (1943). *Teoría de los Conjuntos*. México: Logos de México.
- Grice, Paul. (1975). Logic and Conversation. *Syntax and Semantics 3: Speech Acts*. Eds. P. Colé and J.L. Morgan. New York: Academic Press, 1975. 41-59.
- Grosfoguel, Ramón. (2011). The Epistemic Decolonial Turn: Beyond Political-Economy Paradigms. Walter Dignolo and Arturo Escobar (Eds.). *Globalization and the Decolonial Option*. Londres: Routledge, 65-77.
- Gupta, Anil. y Belnap, Nuel. (1993). *The Revision Theory of Truth*. Cambridge, MA: MIT Press.

- Gutiérrez, Julio y Saldaña, Levi. (s.f.) *Introducción a la filosofía y lógica*. Lima: Editorial Arica S. A.
- Haack, Susan. (1982). *Filosofía de las lógicas*. Madrid: Ediciones Cátedra S.A.
- Habermas, Jürgen. (1987). *Teoría de la acción comunicativa. Volumen 1: Racionalidad de la acción y racionalización social*. Madrid: Taurus.
- Haverkate, Henk. (1992). Las máximas de Grice y los diálogos del Quijote. Actas XI IRVINE 92, AIH Asociación Internacional de Hispanistas, 179-186.
- Hegenberg, Leônidas y Ferreira, Mariluze. (2005). *Novo Dicionário de Lógica*. Río de Janeiro: Pós-Moderno.
- Hempel, Carl. (1945). Studies in the Logic of Confirmation I. *Mind* 54 (13), 1-26. <https://doi.org/10.1093/mind/LIV.213.1>
- Heráclito (1963). *Fragmentos*. Buenos Aires: Aguilar.
- Hessen, Johannes. (1975) *Teoría del conocimiento*. 14^o ed., Buenos Aires: Losada.
- Hilbert, David. (1993). *Fundamentos de las matemáticas*. México: UNAM.
- Hofstadter, Douglas (1987). *Gödel, Escher, Bach: Un Eterno y Grácil Bucle*. Barcelona: Tusquets.
- Hofweber, Thomas. (2017). Logic and ontology. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en <https://plato.stanford.edu/entries/logic-ontology/>
- Horwich, Paul. (1998). *Truth*. 2da.ed., Nueva York: Oxford University Press.
- Horwich, Paul. (1999). The minimalist conception of truth. *Truth*. S. Blackburn y K. Simmons. EEUU: Oxford. 239-263.
- Jalif De Bertranou, Clara Alicia. Vida política, universidad y surgimiento de la fenomenología en el Perú. Revista *UNIVERSUM*, N° 14, 1999, Universidad de Talca, 91-112.
- Jourdain, Philip. (1913). A Correction and Some Remarks. *The Monist* 23, 145-148.

- Kahhat, Farid (3 de noviembre del 2019). La paradoja chilena. *El Comercio*. <https://elcomercio.pe/mundo/latinoamerica/la-paradoja-chilena-por-farid-kahhat-noticia/?ref=ecr>
- Kant, Immanuel. (2006). *Idea para una historia universal en clave cosmopolita*. México: UNAM.
- Kant, Immanuel. (2009). *Crítica de la razón pura*. México: FCE.
- Kazimierz, Ajdukiewicz (1994). *Introducción a la filosofía. Epistemología y metafísica*. Madrid: Ediciones Cátedra
- Kierkegaard, Søren. (1997). *Migajas filosóficas*. Madrid: Bolla.
- Kleene, Stephen Cole. (1938). On a notation for ordinal numbers. *The Journal of Symbolic Logic*, 3, 150–155
- Kleene, Stephen Cole. (1974). *Introducción a la Metamatemática*. Madrid: Tecnos.
- Kneale, William y Kneale, Martha (1980) *El desarrollo de la lógica*. Madrid: Tecnos.
- Koons, Robert (2005). *Sobel on Gödel's ontological proof*. Department of Philosophy University of Texas at Austin. February 14, 2005
- Krauze, Rosa. (1986). *Introducción a la investigación filosófica*. México: UNAM.
- Kripke, Saul. (1975). Outline of a theory of truth. *Journal of Philosophy*, 72, 690-716.
- Kripke, Saul. (1997) “Esbozo de una teoría de la verdad”. Nicolás, J. y M. Frápoli (eds.), *Teorías de la Verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, 109-143.
- Kuhn, Thomas. (2004). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: FCE.
- Kunzmann, Peter, Burkard, Franz y Wiedmann, Franz. (1997). *Atlas de filosofía*. Madrid: Alianza Editorial.
- Laercio, Diógenes. (1985). *Vidas, opiniones y sentencias de los Filósofos más ilustres*. Barcelona: Teorema.
- Lavado, Lucas. (2012). Tratamiento del material bibliográfico. Registrado el 9 de junio del 2012. Disponible en: <http://www.angelfire.com/ego/lucaslavado/tratamiento.html>

- Lazzer, Sandra. (2002). La filosofía de la lógica y el razonamiento de sentido común. Horestein, N., Minhot, L. y Severgnini, H. (eds.) *Epistemología e Historia de la Ciencia*. Vol. 8, N° 8, 190-196.
- Ledger, Gwendolyn. (28 de mayo del 2022). Farid Kahhat, analista internacional: “Taiwán es más importante para EE.UU. que Ucrania”. *América economía*.
<https://www.americaeconomia.com/farid-kahtaiwan-es-mas-importante-para-euu-que-ucrania>
- Leibniz, Gottfried. (1889). *Monadología*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Lévinas, Emmanuel. (1969) *Totality and Infinity: An Essay on Exteriority*. Trans. Alphonso Lingis. Pittsburgh: Duquesne University Press.
- Llanos, Marino (1974). *Un procedimiento decisorio para fórmulas cuantificacionales monádicas de la lógica de primer orden*. [Tesis de Bachillerato, UNMSM]
<https://hdl.handle.net/20.500.12672/16596>
- Llanos, Marino (2003) *Lógica Jurídica. Lógica del proceso judicial*. Lima: Logos.
- López, Alfonso. (12 de diciembre del 2020). Si todo es fascismo, nada es fascismo: el peligro de banalizar. *El Independiente*.
<https://www.elindependiente.com/tendencias/historia/2020/12/12/si-todo-es-fascismo-nada-es-fascismo-el-peligro-de-banalizar/>
- Lukowski, Piotr. (2011). *Paradoxes*. Łódz: Springer.
- MacFarlane, John. (2015). Logical Constant. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en:
<https://plato.stanford.edu/entries/logical-constants/>
- Madrid, Carlos. (2013). *Hilbert. Las bases de la matemática. En el principio fue el axioma*. Navarra: RBA.
- Maldonado, Carlos (2007). Lógicas no-clásicas (5): la lógica cuántica. *Zero*, Diecinueve, Octubre, Bogotá, Universidad Externado de Colombia, 164-168.
- Maldonado-Torres, Nelson. (2007). On the coloniality of being: Contributions to the development of a concept. *Cultural Studies*, 21(2-3), 240-270. <https://doi.org/10.1080/09502380601162548>

- Maldonado-Torres, Nelson. (2011). Thinking through the decolonial turn: Post-continental interventions in theory, philosophy, and critique—An introduction. *TRANSMODERNITY: Journal of Peripheral Cultural Production of the Luso-Hispanic World*, 1(2). <https://doi.org/10.5070/T412011805>
- Maldonado-Torres, Nelson. (2012). Decoloniality at large: Towards a Trans-Americas and global transmodern paradigm (Introduction to second special issue of “Thinking through the decolonial turn”). *TRANSMODERNITY: Journal of Peripheral Cultural Production of the Luso-Hispanic World*, 1(3). <https://doi.org/10.5070/T413012876>
- Maldonado-Torres, Nelson. (2014). Race, religion, and ethics in the modern/colonial world. *Journal of Religious Ethics*, 42(4), 691-711. <https://www.jstor.org/stable/24586119>
- Maldonado-Torres, Nelson. (2022). El giro decolonial, el Caribe y la posibilidad de una filosofía poscontinental. *TRANSMODERNITY: Journal of Peripheral Cultural Production of the Luso-Hispanic World*, 9(8). <http://dx.doi.org/10.5070/T49857559> Retrieved from <https://escholarship.org/uc/item/3w33x7bm>
- Mandeville, Bernard. (1982). *La fábula de las abejas, o cómo los vicios privados hacen la prosperidad pública*. Madrid: Fondo de Cultura Económica. https://puntocritico.com/ausajpuntocritico/documentos/Bernard_de_Mandeville-La_Fabula_de_las_Abejas.pdf
- Manzano, María y Huertas, Antonia. (2004). *Lógica para principiantes*. Madrid: Alianza Editorial.
- Manzano, María y Manuel Moreno. (2010). Argumentos ontológicos. *Bajo Palabra*. Revista de Filosofía, II Época, N° 5, 433-448.
- Martínez Muñoz, Sergio. (2005) *Lógica cuántica*. *Lógica*. Carlos Alchourrón (ed.), Madrid: Trotta, 227-236.
- Martínez Vidal, Concepción (2007). El *status* epistemológico de la lógica: verdad y necesidad. *Filosofía de la lógica*. María Jose Frápolli Sanz. (coord.). Madrid: Tecnos, 83-118.

- Martínez, Yaiza. (2013). “Verificación informática de la existencia de Dios”... y filosofía asistida por ordenadores. *Tendencias21*. Revista electrónica de ciencia, tecnología, sociedad y cultura, Madrid, domingo, 3 de Noviembre del 2013. http://www.tendencias21.net/Verificacion-informatica-de-la-existencia-de-Dios-y-filosofia-asistida-por-ordenadores_a26482.html
- Marx, Karl. (1980). *Manuscritos. Economía y filosofía*. Madrid: Alianza Editorial.
- Masaveu, Óscar. (1997). Sobre un sistema paraconsistente. *Areté*, 9(2), 253-269. <https://doi.org/10.18800/arete.199702.003>
- Merma, Miguel. (2017). Una interpretación algebraica de la lógica de primer orden. [Tesis de Maestría, UNMSM].
- Meyer, Robert., Routley, Richard y Dunn, Michael (1979). Curry's paradox. *Analysis*, 39, 124-128.
- MINEDU. (2017). En el Perú hay 47 lenguas originarias que son habladas por cuatro millones de personas. *Portal de noticias del Ministerio de Educación*. Lima. Consulta: 9 de julio de 2022. <http://www.minedu.gob.pe/n/noticia.php?id=42914>
- Miranda, Horacio y Guzmán, Marisa (2012). Análisis pragmático de las máximas griceanas en textos orales y escritos. *Literatura y Lingüística* N° 26, 229-246.
- Miró Quesada, Francisco. (1963). *Apuntes para una teoría de la razón*. Lima: UNMSM.
- Miró Quesada, Francisco. (1968). *Lógica*. Vol. 1. Lima: s. e.
- Miró Quesada, Francisco. (1969). *Iniciación Lógica* (2da edición). Lima: UNMSM.
- Miró Quesada, Francisco. (1978). Las lógicas heterodoxas y el problema de la unidad de la lógica. Diógenes Rosales (Ed.), *Lógica: Aspectos formales y filosóficos* (13-43). Lima: PUCP.
- Miró Quesada, Francisco. (1982). El mito de la invalidación intuicionista del *Tertium non datur*. *Dianoia: anuario de Filosofía*, N°. 28, 117-128. DOI: <https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.1982.28.826>

- Miró Quesada, Francisco. (1988). La lógica paraconsistente y el problema de la racionalidad de la lógica. En Miró Quesada, Francisco y Carrión, Roque (Eds.) *Antología de la lógica en América Latina*. Madrid: Fundación Banco Exterior, 593-622.
- Miró Quesada, Francisco. (1995). Conversaciones con Juan Bautista Ferro. *Areté*, VII, N° 2, 375-382
- Miró Quesada, Francisco. (2007). Filosofemas. San Marcos, como en los viejos tiempos. “La comisión interventora expulsó a 300 profesores y nombró a otros para reemplazarlos, mediocres y sin méritos suficientes para ocupar una cátedra”. Disponible en: <https://bit.ly/3toPHOG>
- Miró Quesada, Francisco (2008a). Consideraciones generales sobre el concepto de lógica jurídica. En *Obras esenciales, T. VI. Problemas fundamentales de lógica jurídica. Textos conexos*. Lima: URP, 137-145.
- Miró Quesada, Francisco (2008b). Ratio Interpretandi. Ensayo de hermenéutica jurídica. En *Obras esenciales, T. VIII. Ratio Interpretandi. Ensayo de hermenéutica jurídica. Textos conexos*. Lima: URP, 23-259.
- Miró Quesada, Francisco. (2014). Las paradojas de la revolución. En *Obras esenciales, T. IV. Humanismo y Revolución. Textos conexos*. Lima: URP, 491-498.
- Moh Shaw-Kwei. (1954) Logical Paradoxes for Many-Valued Systems. *Journal of Symbolic Logic*, 19, N°1, 37-39.
- Mora, Rafael. (2014). *Análisis lógico de la paradoja de Epiménides*. [Tesis de Licenciatura, UNMSM]
- Mora, Rafael. (2016). *La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell*. [Tesis de Maestría, UNMSM]
- Mora, Rafael. (2018). La pedagogía crítica y la educación actual. *Revista Ciencias y Humanidades*. Vol. VII, No. 7, 175-190.
- Mora, Rafael. (2019a). *El valor de la lógica. Ensayo apologético*. Riga: EAE.
- Mora, Rafael. (2019b). La paradoja de Aquiles y la tortuga como una falacia del continuo. *Tesis*. Año 13, 12(15), 43-62. Disponible en:

- <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/tesis/article/view/18820/15801?fbclid=IwARow685rs-Yv4eLT7MjZumHiOiLcU6GaRgkTYZ1p8qso67er6Fh39bIEguk>
- Mora, Rafael. (2020a). *La paradoja de Curry. Un examen crítico* [Tesis de Doctorado, UNMSM]
- Mora, Rafael. (2020b). El limitado estatus ontológico de la lógica cuántica. *Resonancias. Revista de Filosofía*, (9), 37-53. <https://resonancias.uchile.cl/index.php/RSN/article/view/60604/64096>
- Mora, Rafael. (2020c). *Quechua: problema y posibilidad*. Lima: Acuedi.
- Mora, Rafael. (2020d). *Para comprender a las falacias*. Lima: Acuedi.
- Mora, Rafael. (2020e). Razones por las cuales la lógica cuantificacional de primer grado debe ser exigida por universidades públicas de Lima-Perú en sus temarios de exámenes de admisión. *Revista Educación*, 44(1), 173-191. <https://doi.org/10.15517/revedu.v44i1.37555>
- Mora, Rafael. (2022). *Investigando a la lógica desde un punto de vista filosófico*. Lima: Acuedi.
- Morado, Raymundo. (1984). La Rivalidad en Lógica. *Diánoia*, Vol. 30, N° 30, 237-249. <https://dianoia.filosoficas.unam.mx/index.php/dianoia/article/view/775/779>
- Morado, Raymundo. (2008). ¿Por qué y para quién la lógica?. *Cuadernos UCAB*. N°6, 9-18.
- Morales Ascencio, Bernardo. (1999). Las lógicas no clásicas y el estudio de la modalidad. *Thesaurus: Boletín del Instituto Caro y Cuervo*, 54(3), 1036-1070. https://cvc.cervantes.es/lengua/thesaurus/pdf/54/TH_54_003_358_o.pdf
- Moretti, Alberto. (2004). El concepto tarskiano de verdad. *Filosofía de la Lógica*. Orayen, Raúl y Moretti, Alberto. Madrid: Trotta. 105-142.
- Mosterín, Jesús y Roberto Torreti (2010). *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*. 2da ed., Madrid: Alianza Editorial.

- Mosterín, Jesús. (1980). *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Barcelona: Ariel.
- Mosterín, Jesús. (2000) *Los lógicos*. Madrid: Espasa
- Moulines, Ulises. (2015) *Popper y Kuhn*. Valencia: Batiscafo.
- Nagel, Thomas. (1995). *¿Qué significa todo esto? Una brevísima introducción a la filosofía*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Nagel, Thomas. (2000). *Ensayos sobre la vida humana*. México: FCE.
- Neurath, Otto., Hahn, Hans. y Carnap, Rudolf. (2011). *La concepción científica del mundo – El círculo de Viena*. (Traducido por Alonso Zela). Lima, [Documento pdf en línea]. Recuperado de <http://www.vienayyo.com/wp-content/uploads/2011/10/manifiesto.pdf>
- Nicolescu, Basarab. (2006). “Transdisciplinariedad: pasado, presente y futuro”. *Visión Docente Con-Ciencia*, Año VI, N° 31, 15-33. <https://www.tercercongresomundialtransdisciplinariedad.mx/wp-content/uploads/2019/08/Transdisciplinariedad-PASADO-PRESENTE-FUTURO-.pdf>
- Nietzsche, Friedrich. (1990). *La ciencia jovial*. Caracas: Monte Avila.
- Nuñez, Julián. (1984) *Filosofía y lógica*. Lima: Editorial Artemisa
- Ñique de la Puente, José Antonio. (2004) *El Humanismo Jurídico en San Marcos (1951-2003)*. Tesis doctoral. Lima: UNMSM. Disponible en: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/Tesis/Human/%D1iq ue_PJ/Pdf/T_completo.pdf
- Okasha, Samir. (2002) *Una brevísima introducción a la filosofía de la ciencia*. México: Océano.
- Okon, Elias. (2014). “El problema de la medición en lógica cuántica”. *Revista mexicana de Física E*, 60, 2014, 130-140. Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v60n2/v60n2a7.pdf>
- Oliveros Ramos, Ricardo. (2001). ¿Qué es un ser vivo? *Boletín Matemático para mentes inquietas (BMMI)*, Magazine electrónico, Año 1, N°2, Abril/Mayo 2001. (26 de abril del 2001).
- Oppy, Graham. (2015). *Ontological Arguments*. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponible en:

- <http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/ontological-arguments>
- Osorio, Sergio. (2012). El pensamiento complejo y la transdisciplinariedad: fenómenos emergentes de una nueva racionalidad. *Revista Facultad de Ciencias Económicas: Investigación y Reflexión*. Vol. XX (1), 269-291. <http://www.scielo.org.co/pdf/rfce/v20n1/v20n1a16.pdf>
- Pablo. (2001). Carta a Tito. *Sagrada Biblia*. Barcelona: Cultural S.A., 1193-1194.
- Pabón S. De Urbina, José M. (1997) *Diccionario Manual Griego-Español*. Barcelona: VOX, (18 ° Edición).
- Paenza, Adrián. (2019). *¡Peligro! Matemática explícita*. Buenos Aires: Sudamericana.
- Pailos, Federico. (2014). La paradoja de Curry. E. Barrio (ed.), *Paradojas, paradojas y más paradojas*. Londres: College Publications, 41-52.
- Palau, Gladys. (2002). *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Barcelona: Gedisa.
- Pavón, José. (1973) *Diccionario manual griego. Griego clásico-español*. 7ma edición, Barcelona: Vox.
- Peñaloza, Walter. (1967) *Introducción a la Filosofía y Lógica*. Lima: Editorial Colegio Militar Leoncio Prado.
- Perelman, Chaïm (2007). Lógica formal y no formal. *Praxis Filosófica*, Vol 25, 139-144. <http://www.scielo.org.co/pdf/pafi/n25/n25a09.pdf>
- Pérez, Manuel. (2005). El problema de Hume y la paradoja de Carroll. *Revista Latinoamericana de Filosofía* XXXI/1, 93-120. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/268924864_El_problema_de_Hume_y_la_Paradoja_de_Carroll
- Pérez, Miguel. (2006). *Lógica clásica y argumentación cotidiana*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.
- Pfänder, Alexander. (1945). *Lógica*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

- Pino León, Carlos. (2003). Paradojas. *A Parte Rei. Revista de Filosofía*. N° 25. Disponible en: <http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/paradojas.pdf>
- Piñeiro, Gustavo. (2012). *Gödel. Los teoremas de incompletud. La intuición tiene su lógica*. Navarra: RBA.
- Piscoya, Luis. (1970). *Análisis lógico del concepto de probabilidad*. [Tesis de Bachillerato, UNMSM] <https://hdl.handle.net/20.500.12672/7879>
- Piscoya, Luis. (1978) *Filosofía y lógica*. Lima: Editorial Imprenta D. E. S. A.
- Piscoya, Luis (1995a). Lógica y mecánica cuántica. *Magistri et Doctores*, N°11, Enero-Febrero, 16-17.
- Piscoya, Luis. (1995b). *Investigación Científica y Educacional: un enfoque epistemológico*. Lima: Amaru.
- Piscoya, Luis. (1999). *Filosofía*. Lima: Metrocolor.
- Platón. (1985). *Diálogos I. Apología, Critón, Eutifrón, Ion, Lisis, Cármides, Hipias menor, Hipias mayor, Laques, Protágoras*. Madrid: Gredos.
- Platón. (2005). *La República*. Buenos Aires: Eudeba.
- Plutarco. (1985). *Vidas Paralelas I. Teseo, Rómulo, Licurgo, Numa*. Madrid: Gredos.
- Ponce, Carlos y Ecurra, Miguel (2008). Estudio psicométrico sobre el examen de admisión 2008-I a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. *Revista IIPSI, Facultad de Psicología*, 11(1), 137-152.
- Popper, Karl. (1945) La Defensa del Racionalismo. *Popper. Escritos Selectos*. (1997) (David Miller, comp.) México: FCE, 32-48.
- Popper, Karl. (2017). *La sociedad abierta y sus enemigos*. Barcelona: Paidós.
- Prabhupada, A. C. Bhaktivedanta Swami. (1978). *El Bhagavad-Gita. Tal Como Es*. Los Ángeles: Bhaktivedanta Book Trust.
- Priest, Graham. (1992). What is non-normal world? *Logique & Analyse* 139-40: 291-302.
- Priest, Graham. (2006). *In Contradiction*. Oxford: Oxford University Press.

- Priest, Graham. (2007). *Paraconsistency and Dialetheism*. Dov M. Gabbay y John Woods (Eds.), *Handbook of the history of logic*. Vol 8 (129-204). Oxford: Elsevier.
- Prior, Arthur. (1955). Curry's Paradox and 3-Valued Logic. *Australasian Journal of Philosophy*, 33, 177-182.
- Quesada, Daniel. (2005). Lógica clásica de primer orden. En C. Alchourrón (Coord.), *Lógica*. (pp. 71-104). Madrid: Trotta.
- Quijano, Aníbal (2014). Colonialidad del poder, eurocentrismo y América Latina. A. Quijano, *Cuestiones y horizontes: De la dependencia histórico-estructural a la colonialidad/descolonialidad del poder* (777-832). CLACSO.
<https://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/se/20140507042402/eje3-8.pdf>
- Quijano, Aníbal. (1980). *Dominación y cultura*. Lima: Mosca Azul.
- Quine, Willard Van Orman. (1976) The Ways of Paradox. *The Ways of Paradox and Other Essays*. Cambridge-London: Harvard University Press, 1-18.
- Quine, Willard Van Orman. (2002). *Desde un punto de vista lógico*. Barcelona: Paidós.
- Ramírez de Ferro, Antonieta. (1995). Recordando a Juan Bautista Ferro. *Areté*, VII, N° 2, 383-384.
- Ramsey, Frank Plumpton. (1931). Foundations of Mathematics. *The Foundations of Mathematics and others Logical Essays*. New York y Londres: Harcourt Brace and Company, 1-61.
- Ramsey, Frank Plumpton. (1990). *Philosophical Papers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rea Ravello, Bernardo. (1981). *Introducción a la lógica*. Lima: Amaru Editores.
- Redmond o' Toole, Walter. (1998). *La lógica en el virreinato del Perú a través de las obras de Juan Espinoza Medrano (1688) e Isidoro de Celis (1787)*. Lima: Fondo Editorial de Cultura Económica S. A.
- Redmond o' Toole, Walter. (1999) *Lógica simbólica para todos (lógica elemental, modal epistémica, deóntica, temporal y semántica de los mundos posibles)* México: Universidad Veracruzana.

- Rescher, Nicholas. (2001). *Paradoxes. Their roots, range, and resolution*. Illinois: Open Court.
- Restall, Greg and Rogerson, Susan. (2004). Routes to Triviality. *Journal of Philosophical Logic*, 33, 421-436.
- Revolledo, Álvaro. (2009). Menos Platón y más Darwin. Examen de la crítica rortyana al Representacionismo. *Menos Platón y más Darwin y otros ensayos*. Lima: Mantaro
- Reyna, Ruth. (1977). *Introducción a la filosofía de la India*. Buenos Aires: El Ateneo.
- Rivara de Tuesta, Maria Luisa. (2000). *Filosofía e Historia de las ideas en el Perú*. Lima: FCE.
- Robles, Gemma y Méndez, José (2014). Curry's Paradox, Generalized Modus Ponens Axiom and Depth Relevance. *Studia Logica*, 102 (1), 185-217.
- Rodriguez Consuegra, Francisco. (2007). "Filosofía general y filosofía de la matemática en Gödel". *Analítica*. N°1, año 1, Lima 2007, 167-186.
- Rojas Linares, Dante Enrique. (2012). Filosofía en el Perú. Registrado el 19 de junio del 2012. Disponible en: <http://www.monografias.com/trabajos82/historia-filosofia-peru/historia-filosofia-peru3.shtml>
- Rosales, Diógenes (2000). El concepto de verdad en los procedimientos decisorios de la lógica. Giusti, Miguel. (ed.) *La Filosofía del siglo XX: Balance y Perspectivas. Actas del VII Congreso Nacional de Filosofía*. Lima: Fondo Editorial de la PUCP, 545-552.
- Rosales, Diógenes. (1975). *Crítica de Quine y Piaget al positivismo lógico, sobre los juicios analíticos y los juicios sintéticos*. [Tesis de Bachillerato, UNMSM]
- Rosales, Diógenes. (1994). *Introducción a la lógica*. Lima: Amaru.
- Rosales, Diógenes. (1995). Ferro y los procedimientos decisorios de la lógica. *Areté*, VII, N° 2, 227-244.
- Rosales, Diógenes. (2019). Lógica: tópicos históricos, la lógica en el Perú. *Pluriversidad*, 3 (3), 77-87. <https://doi.org/10.31381/pluriversidad.v3i3.2236>

- Rosario, Héctor. (2007). *Vaishnava Ontological Argument: A Predicate for the Personal Existence of God*. University of Puerto Rico, Mayagüez Campus, Presentado en el Illif School of Theology, Denver, Colorado, USA, September 29. <http://www.dandavats.com/wp-content/uploads/vaishnavaontologicalargument-rosario.pdf>
- Russell, Bertrand (1986). La filosofía del atomismo lógico. Javier Muguerza (ed.) *La concepción analítica de la filosofía*. Madrid: Alianza Editorial, 1986, 139-251.
- Russell, Bertrand y Whitehead, Alfred North (1910). *Principia Mathematica*. Vol. 1. Londres: Cambridge.
- Russell, Bertrand. (1906). Les paradoxes de la logique. *Revue de métaphysique et de morale*. 14, 627-650.
- Russell, Bertrand. (1983). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa-Calpe.
- Russell, Bertrand. (2001). *Misticismo y lógica y otros ensayos*. Barcelona: Edhasa.
- Russell, Bertrand. (2010). *The Philosophy of Logical Atomism*. Londres y Nueva York: Routledge.
- Sadaba, Javier. (1993). Filosofía de la religión y sentido de la vida. *Religión*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Madrid: Trotta, 211-222.
- Salazar Bondy, Augusto. y Miró Quesada, Francisco. (1978) *Introducción a la Filosofía y Lógica*. Lima: Editorial Universo S. A.
- Scruton, Roger. (2003). *Filosofía Moderna: una introducción sinóptica*. 3era. edición, Santiago de Chile: Cuatro Vientos.
- Sierra Casiano, Franklenin. (2012). *Paraconsistencia, dialeteísmo y argumentos de centralidad contra la revisión de la lógica*. [Tesis de licenciatura, UNAM]
- Simpson, Thomas Moro (1975) *Formas lógicas, realidad y significado*. Buenos Aires: Eudeba.
- Sklar, Lawrence (1994). *Filosofía de la física*. Madrid: Alianza Editorial.

- Small, Christopher. (2001). *Reflections on Gödel's Ontological Argument*. Department of Statistics and Actuarial Science, University of Waterloo.
- Smullyan, Raymond. (1978) *What is the name of this book? The riddle of Dracula and other logical puzzles*. New Jersey: Prentice-Hall
- Sobel, Jordan Howard. (2005). *On Gödel's ontological proof: To comments made by Robert Koons*. University of Toronto.
- Sobrevilla, David. (1996). *La Filosofía Contemporánea en el Perú. Estudios, reseñas y notas sobre su desarrollo y situación actual*. Lima: Carlos Matta editor.
- Solé, Isabel y Coll, César. (1995). Los profesores y la concepción constructivista. Coll, C.; Martín, E.; Mauri, T.; Miras, M.; Onrubia, J.; Solé, I. y Zabala, A. *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó, 7-24.
- Sorensen, Roy. (2003) *A brief history of the paradox. Philosophy and the labyrinths of the mind*. New York: Oxford University Press.
- Sorensen, Roy (2007). *Breve historia de la paradoja. La filosofía y los laberintos de la mente*. Barcelona: Tusquets.
- Stahl, Gerold. (1956) *Introducción a la Lógica Simbólica*. Santiago de Chile: Universitaria.
- Stahl, Gerold. (1971) *Al explorar lo infinito*. Santiago de Chile: Universitaria S. A.
- Stroud, Barry. (1991). *El escepticismo filosófico y su significación*. México: FCE
- Suppes, Patrick. (1979) *Introducción a la Lógica Simbólica*. CECSA
- Tarski, Alfred (1956) *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*. EEUU: Oxford.
- Tarski, Alfred. (1997). La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica. J. Nicolás y M. Frápolli, *Teorías de la verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, 63-108.
- Tarski, Alfred. (2000). Verdad y Prueba. L. Piscoya (ed.). *Tópicos en Epistemología*. Lima: UIGV, 191-230.
- Tejada, J. (2014). Un cambio de paradigma: de la silogística aristotélica a la “nueva” lógica”. *Tesis*, 8(7), 9-26.

- Tertuliano. (1975) *La Chair du Christ*. T. I. Paris: Éditions du Cerf.
- Tomasini, Alejandro. (2004). *Filosofía Analítica: un panorama*. Barcelona: Plaza y Valdés.
- Tomasini, Alejandro. (1993). El lenguaje religioso. *Religión*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Madrid: Trotta, 179-194.
- Trelles, Oscar y Diógenes Rosales. (2002) *Introducción a la lógica*. Lima: Fondo Editorial PUCP.
- Trilce. (2005) *Lógica / Psicología*. Lima: [sin editorial]
- Universidad de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE) (2019). *Temario*. Recuperado de <https://bit.ly/2lGc8dT>
- Universidad Nacional de Barranca (UNAB) (2018). *Temario para los Exámenes de Admisión*. Recuperado de <https://bit.ly/2kkIH55>
- Universidad Nacional de Cañete (UNDC) (2018). *Temario del Examen de Admisión 2018*. Recuperado de http://undc.edu.pe/portal/wp-content/uploads/2016/10/TEMARIO_2018.pdf
- Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) (2019). *Asignaturas para el examen de admisión ordinario*. Recuperado de <https://bit.ly/2lUkRt8>
- Universidad Nacional del Callao (UNAC) (2019). *Temario del examen de admisión*. Recuperado de <http://admission.unac.edu.pe/temario.aspx>
- Universidad Nacional Federico Villareal (UNFV) (2019). *Temario*. Recuperado de <https://bit.ly/2Xsll8c>
- Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión (UNJFSC) (2017). *Contenidos temáticos del prospecto de admisión 2018-I*. Recuperado de <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:DKALw wiJPHIJ:www.unjfsc.edu.pe/archivos/admision/TEMARIO/7a6605913446e5f4d0428b54f28c9f6d76221617.pdf&cd=2&hl=es-419&ct=clnk&gl=pe>
- Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) (2013). *Biografía de Francisco Miró Quesada Cantuarias*. Recuperado de <http://www.unmsm.edu.pe/ilustres/biografia/47>

- Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur (UNTELS) (2017). *Temario. Examen de Admisión*. Recuperado de http://www.untels.edu.pe/documentos/permanente/admisionTemario2017_2.pdf
- UNIVERSITAM. (2 de Octubre 2011) “Utilizan nueva técnica de lógica cuántica para verificar si la constante de estructura fina realmente es variable”. *Universitam. Ciencia, investigación, tecnología y desarrollo*. Disponible en: <http://universitam.com/academicos/?p=12748>
- UPV/EHU. (16 de marzo del 2017). Diseñan una puerta lógica cuántica robusta y ultrarrápida que funciona en un microsegundo. *Noticias de la UPV/EHU*. Disponible en: https://www.ehu.eus/es/content/-/asset_publisher/W6wn/content/n_20170316_puertas-cuanticas
- Uxía, María (2012) Pragmática. Vega, L y Olmos, P. (eds.). *Compendio de lógica, argumentación y retórica*. Madrid: Trotta, 473-478.
- Vargas Llosa, Mario. (2018, 28 de octubre). *Hispanidad ¿mala palabra?* El País. https://elpais.com/elpais/2018/10/25/opinion/1540480036_431820.html
- Vegecio, Flavio. (2006). *Compendio de técnica militar*. Madrid: Editorial Cátedra
- Voltaire. (2004). *Cándido*. Madrid: Cátedra.
- Wang, Hao. (1996) *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge, Mass., y Londres: The MIT Press.
- Weinberg, Justin. (7 de enero del 2016). The Paradox of Unanimity. *Dailynous* <https://dailynous.com/2016/01/07/the-paradox-of-unanimity/>
- Wilce, Alexander (2012). “Quantum Logic and Probability Theory”. En: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en: <http://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/>
- Wittgenstein, Ludwig. (1957) *Tractatus lógico-philosophicus*. Madrid: Revista de Occidente.
- Wittgenstein, Ludwig. (2004). *Tractatus logico-philosophicus*. Madrid: Alianza Editorial.

- Wittgenstein, Ludwig. (2009). *Tractatus logico-philosophicus. Investigaciones filosóficas. Sobre la Certeza*. Madrid: Gredos.
- Wright, Crispin. (2007). Verdad: un debate tradicional revisado. *Areté*. 2007, vol.19, no.2 [citado 06 Marzo 2013], 265-304. Disponible en: http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1016-913X2007000200004&lng=es&nrm=iso
- Yablo, Stephen. (1993). Paradox without Self-Reference. *Analysis*, N° 53, 251-252.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*. 8. 338-353.
- Zermelo, Ernst. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*. 65, 261-281.
- Zulen, Pedro (2015). Programas de psicología y lógica. R. Quiroz Avila, P. Quintanilla Pérez-Wicht, y J. Rojas Huaynates (eds.). *Pedro S. Zulen: Escritos reunidos*, 117–151. Lima: Congreso del Perú.

EL AUTOR



Rafael Félix Mora Ramirez es un filósofo egresado de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), donde obtuvo el título de Licenciado y los grados de Magíster y Doctor. Además, es posdoctor en Ciencias por la Universidad Nacional Hermilio Valdizán (UNHEVAL) y, actualmente, cursa la carrera de Farmacia y Bioquímica en la Universidad Norbert Wiener. **Es profesor**

nombrado en la Universidad Nacional Federico Villarreal (UNFV) y en la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI). Su trabajo académico se centra en la cultura, la lógica, la epistemología y la filosofía analítica. **Ha publicado** diversos libros, entre ellos: *El valor de la lógica. Ensayo apologético* (2019), *Quechua: problema y posibilidad* (2020), *Para comprender a las falacias* (2020), *Investigando la lógica desde un punto de vista filosófico* (2022), *Temas actuales de ética* (2023), *Ética y filosofía política* (2023) y la novela *Juventud en lucha* (2022). También, es coautor de *El problema de la esencia de la lógica jurídica. Recomendaciones didácticas* (2023) y *Arturo Ardao, el filósofo historiador de las ideas: Pensamiento y Obra* (2024). **Es miembro** del Centro de Estudios de Filosofía Analítica (CESFIA), la Sociedad Peruana de Filosofía (SPF), la Academia Mexicana de Lógica (AML), la Red Holos Siglo XXI, la Asociación de Egresados de Filosofía de la UNMSM, el Grupo de Investigación Juan Bautista Ferro (GI JUBAFE) de la UNI y el Grupo de Estudios Andinos (GREa) de la UNFV. Además, ha sido parte del Comité de Ética y del Comité Científico de la Facultad de Humanidades de la UNFV y preside el Instituto Peruano de Investigación de Lógica y Filosofía (IPILOF). **Ha ejercido la docencia** en diversas universidades, incluyendo la UNMSM, la Universidad Católica Sedes Sapientiae (UCSS) y la UNHEVAL, impartiendo cursos como Filosofía, Lógica Jurídica, Historia de la Ciencia, Ética, Epistemología y Seminario de Tesis. Entre sus **reconocimientos** destacan el Premio de Lógica Francisco Miró Quesada Cantuarias, otorgado por la Sociedad Peruana de Epistemología y Lógica (SPELO) y la *Logica Universalis Association* (LUA) al mejor artículo inédito en lógica. También, fue galardonado en el Concurso de Enseñanza y Difusión Digital de la Olimpiada Internacional de Lógica 2021 (CEDDOIL). Su ensayo *El triángulo de Sábato aplicado a la problemática de la universidad peruana* recibió mención honrosa en los II Juegos Florales Universitarios Nacionales (2022), organizados por la Universidad Nacional de Trujillo.

Su ORCID es <https://orcid.org/0000-0002-6420-493X>. Contacto: rmora@unfv.edu.pe / rmorar@uni.edu.pe / rafael.f.mora@gmail.com

